6　エネルギーの保存則

教科書 p.66-p.73

6.1　ポテンシャルエネルギー

- 力が保存力（質点の位置 $\vec{r}$ のみで決まる力）の場合、$\vec{r}_A \to \vec{r}_B$ と質点を動かすときの仕事

$$W = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}m\vec{v}_B^2 - \frac{1}{2}m\vec{v}_A^2 \tag{97}$$

  は $\vec{r}_A$ と $\vec{r}_B$ の間の経路によらず、始点と終点の運動エネルギーの差を与える

  - $\vec{r}_B \to \vec{r}_A$ と質点を動かした場合の仕事は $\vec{r}_A \to \vec{r}_B$ の仕事と大きさが等しく符号が逆

$$\begin{aligned}\int_{\vec{r}_B}^{\vec{r}_A} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} &= \frac{1}{2}m\vec{v}_A^2 - \frac{1}{2}m\vec{v}_B^2 \\ &= -\left(\frac{1}{2}m\vec{v}_B^2 - \frac{1}{2}m\vec{v}_A^2\right) \\ &= -\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}\end{aligned}$$

  - 終点と始点が同じ場合（$\vec{r}_A \to \vec{r}_A$）の仕事は 0

$$\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_A} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}m\vec{v}_A^2 - \frac{1}{2}m\vec{v}_A^2 = 0$$

- **ポテンシャルエネルギー**：位置 $\vec{r}$ から基準点 $\vec{r}_0$ まで質点を動かす際に**保存力が**する仕事

$$U(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_0} \vec{F}(\vec{s}) \cdot d\vec{s} = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{s}) \cdot d\vec{s} \tag{98}$$

  - 定積分の場合積分変数は何を使っても良いが、今の場合**積分の範囲に変数** $\vec{r}$ が使われているので、別の変数（例えば $\vec{s}$）を積分変数に使う必要がある（演習問題参照）
  - 基準点 $\vec{r}_0$ から位置 $\vec{r}$ まで質点を動かす際に保存力がする仕事の逆符号
  - 基準点 $\vec{r} = \vec{r}_0$ ではポテンシャルエネルギーがゼロ

$$U(\vec{r}_0) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_0} \vec{F}(\vec{s}) \cdot d\vec{s} = 0 \tag{99}$$

  - 基準点 $\vec{r}_0$ は自由に選べる：ポテンシャルエネルギーは定数の不定性がある
    座標原点にとる（$\vec{r}_0 = \vec{0}$）と簡単な場合が多い

- 1 次元の場合

$$U(x) = -\int_{x_0}^{x} F_x(s) ds \tag{100}$$

- 力はポテンシャルの x 微分で与えられる

$$F_x(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \quad \left(\Leftrightarrow F_x(s) = -\frac{dU(s)}{ds}\right) \tag{101}$$

  ← 微分積分学の基本定理より

$$-\int_{x_0}^{x} F_x(s)ds = -\int_{x_0}^{x} \left(-\frac{dU(s)}{ds}\right) ds = U(x) - \underbrace{U(x_0)}_{=0} = U(x)$$

- 式 (101) 右辺：ポテンシャルエネルギー $U(x)$ の変化の逆符号
  ポテンシャルエネルギーの高いところから低い方へ力がはたらく

6.2　ポテンシャルエネルギーの例

- 重力のポテンシャルエネルギー
  - 質量 m の質点の鉛直方向の 1 次元運動（鉛直上向きに x 軸）
  - 質点にはたらく力（g は重力加速度）

$$F_x(x) = -mg$$

  - 基準位置を $x = 0$ としたとき、位置 x のポテンシャルエネルギーは

$$U(x) = -\int_0^x (-mg)ds = mg[s]_0^x = mgx \tag{102}$$

    $x > 0$ のとき：ポテンシャルエネルギーは正
    $x < 0$ のとき：ポテンシャルエネルギーは負
  - 高い（x が正で大きい）場所にある質点は大きなポテンシャルエネルギーを持つ
    位置エネルギー
  - $U(x)$ の傾きが一定：力の強さは一定

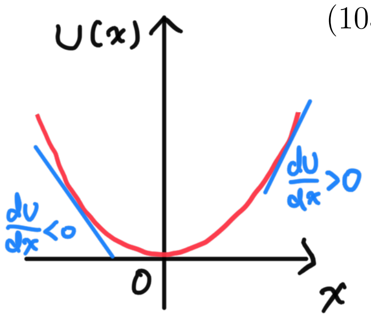
- ばねのポテンシャルエネルギー
  - ばねにつながれた質点の 1 次元運動（ばねの向きに x 軸、重力や摩擦は考えない）
  - 質点にはたらく力（k はばね定数）

$$F_x(x) = -kx$$

  - 基準位置を $x = 0$（ばねの自然長）としたとき、位置 x のポテンシャルエネルギーは

$$U(x) = -\int_0^x (-ks)ds = k\left[\frac{s^2}{2}\right]_0^x = \frac{kx^2}{2} \tag{103}$$

    $x > 0$ でも $x < 0$ でもポテンシャルエネルギーは正
    ⇒ $x = 0$ が一番エネルギーが低い
  - $U(x)$ の傾きが一定でない：力の強さ変位によって決まる
  - $U(x)$ のグラフから力の向きが読み取れる



6.3　力学的エネルギーの保存

- $\vec{r}_A \to \vec{r}_B$ と質点を動かすときの仕事

$$W = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} m\vec{v}_B^2 - \frac{1}{2} m\vec{v}_A^2 \tag{104}$$

運動エネルギーで表現できる

- 仕事は経路に依存しないので $\vec{r}_A \to \vec{r}_0 \to \vec{r}_B$ と動かすと

$$\begin{aligned} W &= \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_0} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_B} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \\ &= \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_0} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} - \int_{\vec{r}_B}^{\vec{r}_0} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \\ &= U(\vec{r}_A) - U(\vec{r}_B) \end{aligned}$$

ポテンシャルエネルギーでも表現できる

- 両者が等しいので

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m\vec{v}_B^2 - \frac{1}{2} m\vec{v}_A^2 &= U(\vec{r}_A) - U(\vec{r}_B) \\ \frac{1}{2} m\vec{v}_B^2 + U(\vec{r}_B) &= \frac{1}{2} m\vec{v}_A^2 + U(\vec{r}_A) \end{aligned} \tag{105}$$

左辺：位置 $\vec{r}_B$ にいるときの運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和
右辺：位置 $\vec{r}_A$ にいるときの運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和

- **力学的エネルギーの保存**
保存力の場合、質点の運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和は常に一定

$$\frac{1}{2} m\vec{v}^{\,2} + U(\vec{r}) = (\text{一定}) \tag{106}$$

- 例）重力中の 1 次元運動
ポテンシャルエネルギーは $U(x) = mgx$ なので

$$\frac{1}{2} mv^2 + mgx = (\text{一定}) \tag{107}$$

ある位置 x_0 での速度 v_0 を知っていれば、任意の位置 x での速度 v がわかる

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} mv^2 + mgx &= \frac{1}{2} mv_0^2 + mgx_0 \\ \frac{1}{2} mv^2 &= \frac{1}{2} mv_0^2 + mgx_0 - mgx \\ v^2 &= v_0^2 + 2g(x_0 - x) \end{aligned}$$

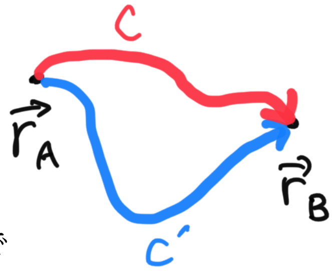
6.4　非保存力がある場合

- 一般の場合、力は保存力と非保存力の和

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}) + \vec{F}_{\text{非}} \tag{108}$$

このとき $\vec{r}_A \to \vec{r}_B$ の仕事は（C は $\vec{r}_A$ から $\vec{r}_B$ へ向かう経路 C を指定）

$$\begin{aligned}\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} + \int_C \vec{F}_{\text{非}}\cdot d\vec{r} \\ &= U(\vec{r}_A) - U(\vec{r}_B) + \int_C \vec{F}_{\text{非}}\cdot d\vec{r}\end{aligned}$$



- 運動エネルギーの変化は非保存力を含めた仕事に等しいので

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}m\vec{v}_B^{\,2} - \frac{1}{2}m\vec{v}_A^{\,2} &= U(\vec{r}_A) - U(\vec{r}_B) + \int_C \vec{F}_{\text{非}}\cdot d\vec{r} \\ \frac{1}{2}m\vec{v}_B^{\,2} + U(\vec{r}_B) &= \frac{1}{2}m\vec{v}_A^{\,2} + U(\vec{r}_A) + \int_C \vec{F}_{\text{非}}\cdot d\vec{r}\end{aligned} \tag{109}$$

- 非保存力の仕事は熱エネルギーなどに変化する
- 仕事をどのように効率よくエネルギーに変換するか？→ 熱力学（物理通論 II）へ

前半のまとめ

- 運動の法則はニュートンの運動方程式で表現される

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \tag{110}$$

- 様々な物理現象がニュートンの運動方程式から導かれる
  - 単振動する質点の運動

$$x(t) = A\cos(\omega t + \theta_0) \tag{111}$$

  - 仕事とエネルギーの関係

$$\frac{1}{2}m\vec{v}_B^{\,2} - \frac{1}{2}m\vec{v}_A^{\,2} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} \tag{112}$$

  - 力学的エネルギー保存

$$\frac{1}{2}m\vec{v}^{\,2} + U(\vec{r}) = (\text{一定}) \tag{113}$$