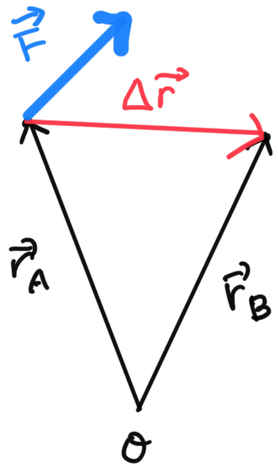
5　仕事とエネルギー

教科書 p.62-p.66



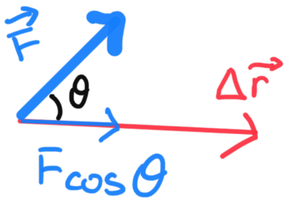
5.1　仕事

- 一定の力 $\vec{F}$ がはたらいている質点が位置 $\vec{r}_A$ から $\vec{r}_B$ に動く
- 変位ベクトル

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A \tag{71}$$
$$= \begin{pmatrix} \Delta x & \Delta y & \Delta z \end{pmatrix} \tag{72}$$
$$\Delta r = |\Delta\vec{r}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} \tag{73}$$

- 複数の力がはたらくとき、**それぞれの力ごと**に仕事を考える
  $\Rightarrow$ ある力 $\vec{F}$ に対して、変位ベクトル $\Delta\vec{r}$ が同じ方向とは限らない

- **仕事** W：力 $\vec{F}$ と変位ベクトル $\Delta\vec{r}$ の内積



$$W = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r} \tag{74}$$
$$= F\Delta r\cos\theta \tag{75}$$
$$= F_x\Delta x + F_y\Delta y + F_z\Delta z \tag{76}$$

  θ は $\vec{F}$ と $\Delta\vec{r}$ の間の角度：$F\cos\theta$ は $\vec{F}$ の $\Delta\vec{r}$ 方向成分

  - 力がはたらいているが質点が動かないとき（$\Delta\vec{r} = \vec{0}$）：$W = 0$
    例）床の上に静止している質点への重力の仕事
  - 質点が動いているが力がはたらかないとき（$\vec{F} = \vec{0}$）：$W = 0$
    例）等速直線運動
  - 力と反対方向に質点が動くとき（$\theta = \pi$、$\cos\theta = -1$）：$W < 0$
    例）$\vec{F}$ と反対方向に別の力がはたらいている場合

- 運動が 1 次元の場合：

$$\Delta\vec{r} = \begin{pmatrix} \Delta x & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{77}$$
$$W = F_x\Delta x \tag{78}$$

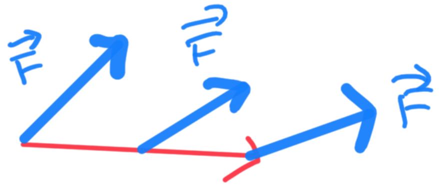
  F_x は $\vec{F}$ の x 方向成分（F_y、F_z は 0 とは限らない）

- 仕事の次元：力 $\times$ 距離

$$LMT^{-2} \times L = L^2MT^{-2} \tag{79}$$

  SI での単位はジュール $\mathrm{J} = \mathrm{N}\cdot\mathrm{m} = \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-2}$

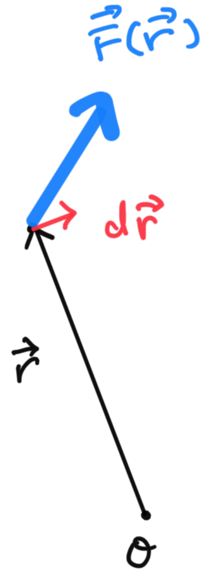
5.2 力が一定でない場合



- 力が位置 $\vec{r}$ によって変化する

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} F_x(x, y, z) & F_y(x, y, z) & F_z(x, y, z) \end{pmatrix} \tag{80}$$

3 つの変数 x, y, z の関数



- **保存力**：式 (80) のように質点の位置 $\vec{r}$ のみで決まる力
例）重力、万有引力、バネの力
保存力でない例）摩擦力、空気抵抗

- 位置 $\vec{r}$ における微小な（長さが無限小）変位 $d\vec{r}$ に対する仕事

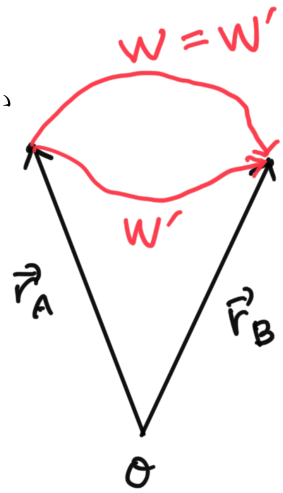
$$\vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = F_x(\vec{r})dx + F_y(\vec{r})dy + F_z(\vec{r})dz \tag{81}$$

変位 $d\vec{r}$ の間は力が $\vec{F}(\vec{r})$ で一定とみなせる

- 質点が位置 $\vec{r}_A$ から $\vec{r}_B$ に動く際の仕事
各 $\vec{r}$ での微小仕事を足し上げる = 積分する

$$W = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \tag{82}$$

右辺は線積分と呼ばれる（この授業では詳しくは扱わない）
保存力の場合、線積分の値は $\vec{r}_A$ と $\vec{r}_B$ の間の経路によらない



- 運動が 1 次元の場合：力 F_x は座標 x のみの関数 $F_x(x)$

$$W = \int_{x_A}^{x_B} F_x(x)dx \tag{83}$$

F_x は $\vec{F}$ の x 方向成分（F_y、F_z は 0 とは限らない）

5.3 運動エネルギー

- エネルギー：仕事をする能力

- **運動エネルギー** T：

$$T = \frac{1}{2}m\vec{v}^{\,2} = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \tag{84}$$

- エネルギーの次元：質量 × 速度 ^{2}

$$M \times (LT^{-1})^2 = L^2MT^{-2} \tag{85}$$

仕事と同じ次元、SI での単位は $\mathrm{J} = \mathrm{N} \cdot \mathrm{m} = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2}$

- 合力 $\vec{F}(\vec{r})$ がはたらいている質量 m の質点が位置 $\vec{r}_A$ から $\vec{r}_B$ に動く
（ここでは**全ての力の合力**を考える点に注意）

- 位置 $\vec{r}_A$ での速度を $\vec{v}_A$、$\vec{r}_B$ での速度を $\vec{v}_B$ とすると、以下が成り立つ：

$$\frac{1}{2}m\vec{v}_B^{\,2} - \frac{1}{2}m\vec{v}_A^{\,2} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \tag{86}$$

左辺：質点の運動エネルギーの変化
右辺：F が質点にした仕事
質点の**運動エネルギーの変化**は**合力が質点に与えた仕事**に等しい

- 式 (86) の証明

  - 位置 $\vec{r}_A$ にいる時刻を t_A、$\vec{r}_B$ にいる時刻を t_B とすると

$$\vec{v}_A = \vec{v}(t_A), \quad \vec{v}_B = \vec{v}(t_B) \tag{87}$$

$$\begin{pmatrix} v_{Ax} & v_{Ay} & v_{Az} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x(t_A) & v_y(t_A) & v_z(t_A) \end{pmatrix} \tag{88}$$

  - 運動方程式の x 成分：

$$m\frac{dv_x}{dt} = F_x \tag{89}$$

  - 式 (89) 右辺に x 方向の速度 $v_x = dx/dt$ をかけて t について t_A から t_B まで積分

$$\int_{t_A}^{t_B} F_x v_x \, dt = \int_{t_A}^{t_B} F_x \frac{dx}{dt} dt = \int_{x_A}^{x_B} F_x \, dx \tag{90}$$

  - 速度 $v_x(t)$ を２乗して時間 t で微分

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[v_x(t)]^2 &= \frac{d}{dv_x}v_x^2\frac{dv_x}{dt} \\ &= 2v_x\frac{dv_x}{dt} \\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}[v_x(t)]^2 &= v_x\frac{dv_x}{dt} \end{aligned}$$

    よって式 (89) 左辺に $v_x = dx/dt$ をかけて t について t_A から t_B まで積分すると

$$\int_{t_A}^{t_B} mv_x\frac{dv_x}{dt}dt = \int_{t_A}^{t_B} \frac{m}{2}\frac{d}{dt}[v_x(t)]^2 dt \tag{91}$$

  - 微分積分学の基本定理：

$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x) \tag{92}$$

のとき、

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \left[\frac{dF(x)}{dx}\right] dx = F(b) - F(a) \tag{93}$$

に対し $x \leftarrow t$、$a \leftarrow t_A$、$b \leftarrow t_B$、$F(x) \leftarrow (m/2)[v_x(t)]^2$ と代入すると

$$\begin{aligned}\int_{t_A}^{t_B} \frac{m}{2}\frac{d}{dt}[v_x(t)]^2 dt &= \frac{m}{2}[v_x(t_B)]^2 - \frac{m}{2}[v_x(t_A)]^2 \\ &= \frac{1}{2}mv_{Bx}^2 - \frac{1}{2}mv_{Ax}^2 \end{aligned}\tag{94}$$

– 運動方程式より式 (90) と (91) は等しいので、

$$\int_{t_A}^{t_B} \frac{m}{2}\frac{d}{dt}[v_x(t)]^2 dt = \int_{x_A}^{x_B} F_x\ dx \tag{95}$$

$$\frac{1}{2}mv_{Bx}^2 - \frac{1}{2}mv_{Ax}^2 = \int_{x_A}^{x_B} F_x\ dx \quad \leftarrow (94) \tag{96}$$

– y, z についても同様の式が成り立つので、3 成分の両辺をそれぞれ足すと

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \frac{1}{2}mv_{Bx}^2 - \frac{1}{2}mv_{Ax}^2 + \left(\frac{1}{2}mv_{By}^2 - \frac{1}{2}mv_{Ay}^2\right) + \left(\frac{1}{2}mv_{Bz}^2 - \frac{1}{2}mv_{Az}^2\right) \\ &= \frac{1}{2}m\left(v_{Bx}^2 + v_{By}^2 + v_{Bz}^2\right) - \frac{1}{2}m\left(v_{Ax}^2 + v_{Ay}^2 + v_{Az}^2\right) \\ &= \frac{1}{2}m\vec{v}_B^{\,2} - \frac{1}{2}m\vec{v}_A^{\,2} \\ (\text{右辺}) &= \int_{x_A}^{x_B} F_x\ dx + \int_{y_A}^{y_B} F_y\ dy + \int_{z_A}^{z_B} F_z\ dz \\ &= \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} (F_x\ dx + F_y\ dy + F_z\ dz) \\ &= \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}\cdot d\vec{r}\end{aligned}$$

よって式 (86) が成り立つ