

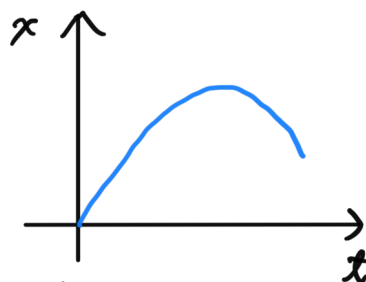
2 数学的な基礎

教科書 p.11-18

2.1 1次元の運動と微分

- **質点**：質量を持つが大きさを持たないもの
通常物体の大きさが小さい極限（理想化）と考える
大きさを持っている物体（剛体）も、重心運動は質点の運動として記述される
- 1次元の運動：質点が1つの方向（前後、左右など）しか動けない場合
→ 質点の位置を一つの変数 x （次元 L ）で表す
- 運動する質点は時間とともに位置が変化する
→ x は時間 t の関数

$$x(t)$$



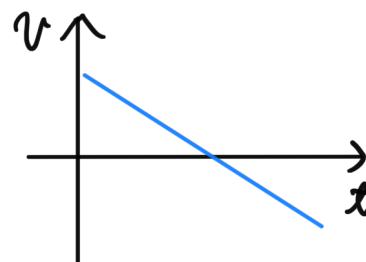
(2)

変数（今の場合時間 t ）が明らかな場合は省略して書く場合がある

- **速度**：位置の時間変化（傾き）、次元 LT^{-1}

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}, \quad v = \frac{dx}{dt}$$

速度も時間の関数

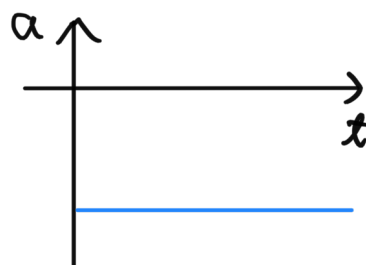


(3)

- **加速度**：速度の時間変化（傾き）、次元 LT^{-2}

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}, \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

加速度も時間の関数



(4)

- **微分**：関数 $f(x)$ の変化量

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

別の書き方

$$\frac{d}{dx}f(x), \quad \frac{d}{dx}[f(x)], \quad df(x)/dx, \quad \dots \quad (6)$$

ただし分子の d は常に微分する関数（今の場合 f ）より左に書く
参考）積分の dx を非積分関数より前に書いても良い

$$\int f(x)dx = \int dx f(x) \quad (7)$$

- 関数の積の微分：それぞれの関数の微分の和

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = \frac{df(x)}{dx}g(x) + f(x)\frac{dg(x)}{dx} \quad (8)$$

例) $f(x) = x^2$ 、 $g(x) = \sin x$ の場合

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[x^2 \sin x] &= \frac{d}{dx}[x^2] \sin x + x^2 \frac{d}{dx}[\sin x] \\ &= 2x \sin x + x^2 \cos x \end{aligned}$$

- 合成関数の微分：中身の微分をかける

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = \frac{dF(g)}{dg} \frac{dg(x)}{dx} \quad (9)$$

例) $F(g) = \exp\{g\} = e^g$ 、 $g(x) = ax^2$ の場合

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[\exp\{ax^2\}] &= \frac{dF(g)}{dg} \frac{dg(x)}{dx} \\ &= \frac{d}{dg} \exp\{g\} \frac{d}{dx}(ax^2) \\ &= \exp\{g\} \times 2ax \\ &= 2ax \exp\{ax^2\} \end{aligned}$$

2.2 ベクトル

- ベクトル**： x, y, z 3つの成分を持っている（ベクトルは矢印で書く）

$$\vec{r} = (x \ y \ z), \quad \vec{F} = (F_x \ F_y \ F_z), \quad \dots \quad (10)$$

この授業では行列を扱わないので縦書きでも横書きでも良い
 x, y, z 成分を 1, 2, 3 と表記する場合もある

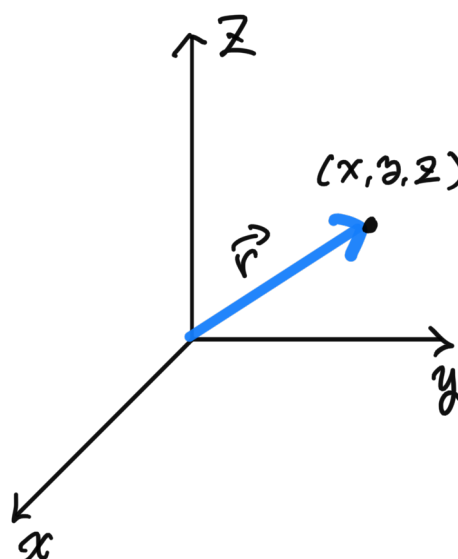
- ゼロベクトル**：すべての成分が0のベクトル

$$\vec{0} = (0 \ 0 \ 0) \quad (11)$$

- スカラー**：1成分のみの数

$$m, \ x, \ \dots \quad (12)$$

ベクトルの一つの成分もスカラー



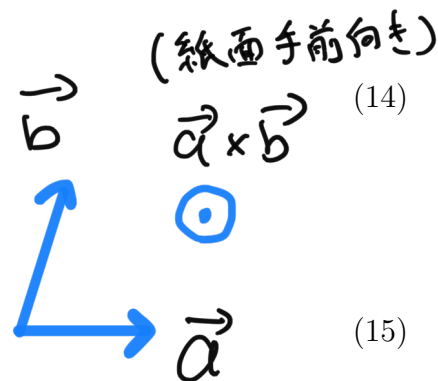
- ベクトルとスカラーは足し引きできない
→ 等式の両辺でベクトル/スカラーは常に一致
例)

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} - \vec{b} = \underbrace{\vec{0}}_{\text{ゼロベクトル}} \quad (13)$$

- 内積** (スカラー積、結果がスカラー)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (14)$$

(\vec{a}, \vec{b}) と表記することもある



- 外積** (ベクトル積、結果がベクトル)

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\underbrace{a_y b_z - a_z b_y}_{x \text{ 成分}} \quad \underbrace{a_z b_x - a_x b_z}_{y \text{ 成分}} \quad \underbrace{a_x b_y - a_y b_x}_{z \text{ 成分}} \right) \quad (15)$$

$\vec{a} \times \vec{b}$ のベクトルは \vec{a}, \vec{b} 両方と直交し、向きは \vec{a} から \vec{b} に右ねじが進む方向

- ベクトルの2乗:

$$\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \quad (16)$$

- ベクトルの大きさ:

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (17)$$

- 内積と外積のベクトルの大きさ:

θ を \vec{a} と \vec{b} の間の角度として

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \theta \quad (18)$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin \theta \quad (19)$$

- $\theta = \pi/2 = 90^\circ$ (直角) のとき、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 、 $|\vec{a} \times \vec{b}| = ab$

- $\theta = 0 = 0^\circ$ (同じ向き) のとき、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab$ 、 $|\vec{a} \times \vec{b}| = 0$ 、 $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

- 内積と外積の性質:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \quad (20)$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \quad (21)$$

- ベクトルの微分: 各成分の微分

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \quad (22)$$

2.3 3次元の運動

- 3次元の運動：質点が3つの方向（前後、左右、上下など）に動ける場合
→ 質点の位置を3つの変数 x, y, z （それぞれ次元 L ）で表す
- 運動する質点は時間とともに位置が変化する
→ $\vec{r} = (x \ y \ z)$ の各成分は時間 t の関数

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) & y(t) & z(t) \end{pmatrix} \quad (23)$$

1次元の位置を3つ組み合わせたもの
 \vec{x} と書く場合もある

- **速度**：位置の時間変化（傾き）、各成分の次元 LT^{-1}

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx(t)}{dt} & \frac{dy(t)}{dt} & \frac{dz(t)}{dt} \end{pmatrix} \quad (24)$$

1次元の速度を3つ組み合わせたもの

- **加速度**：速度の時間変化（傾き）、各成分の次元 LT^{-2}

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dv_x(t)}{dt} & \frac{dv_y(t)}{dt} & \frac{dv_z(t)}{dt} \end{pmatrix} \quad (25)$$

$$= \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \begin{pmatrix} \frac{d^2x(t)}{dt^2} & \frac{d^2y(t)}{dt^2} & \frac{d^2z(t)}{dt^2} \end{pmatrix} \quad (26)$$

1次元の加速度を3つ組み合わせたもの