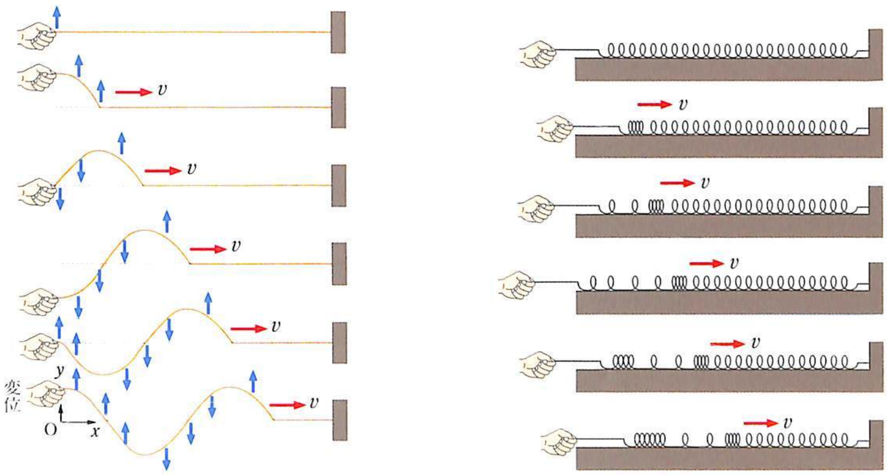

図 12.1 ひもを伝わる波（横波）.　図 12.2 つる巻きばねを伝わる波（縦波）.

図 1: 縦波と横波の模式図、原康夫「物理学基礎」(学術図書出版社) p.131 より引用。

12　波の性質

教科書 p.131-p.142

12.1　波動

- 波動：媒質の振動が空間的に伝わる（伝播する）現象
- **媒質**：振動を伝えるもの、空間的に連続分布している
  波が伝搬しても媒質自体は移動しない
  例）海水（海の波)、空気（音)、電磁場（光）
- **変位**：媒質の基準位置からのずれ、次元 L
  - **横波**：波の進行方向と変位が垂直（図 1 左）
  - **縦波**：波の進行方向と変位が並行（図 1 右）
- 時刻 t に位置 x にある媒質の変位（波の進行方向が 1 次元的な場合）

$$y(t,x) = A\sin(\omega t - kx) \tag{221}$$

$\omega t - kx$：位相、無次元
ω：**角振動数**（振動数 f、周期 T と $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ の関係)、次元 T^{-1}
k：**波数**（波長 λ と $k = 2\pi/\lambda$ の関係)、次元 L^{-1}
A：振幅、次元 L

- $x = x_0$ に固定すると（同じ位置の媒質に注目して変位の時間変化をみる）

$$y(t) = A\sin(\omega t + 定数) \tag{222}$$

振幅 A、角振動数 ω の単振動

- $t = t_0$ に固定すると（時間を止めて各点の変位の形を見る）

$$y(x) = A\sin(定数 - kx) \tag{223}$$

波の空間的な形が三角関数

- 波の**伝搬速度** v：周期 T の間に波長 λ 進むので

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} \tag{224}$$

12.2 偏微分

- 2 変数関数 $f(x, y)$：変数 x と y 両方を与えると関数の値が 1 つ決まる
  x, y 平面の各点に値 $f(x, y)$ がある（図示するなら z 方向）

- **偏微分**：多変数関数での微分（通常の 1 変数関数の微分は常微分）
  ある点 x, y での $f(x, y)$ の x 方向の傾きと y 方向の傾き

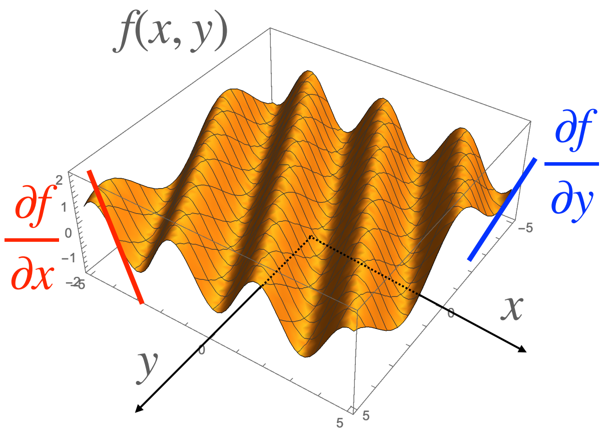

図 2: 2 変数関数 $f(x, y) = \sin(x - 2y)$。

- 偏微分の定義

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{f(x+\Delta, y) - f(x, y)}{\Delta} = \frac{\partial}{\partial x}f(x, y) \tag{225}$$

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{f(x, y+\Delta) - f(x, y)}{\Delta} = \frac{\partial}{\partial y}f(x, y) \tag{226}$$

- 使い方：偏微分する変数以外は定数とみなして微分（A, B, C は定数）

$$\frac{\partial}{\partial x}(Ax^2y + Bx + C) = \underbrace{Ay}_{定数}\frac{\partial}{\partial x}(x^2) + B = 2Axy + B$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(Ax^2y + Bx + C) = \underbrace{Ax^2}_{定数}\frac{\partial}{\partial y}y + \frac{\partial}{\partial y}\underbrace{(Bx + C)}_{定数} = Ax^2$$

- どの変数を固定するかを明らかにするため以下のように表記する場合もある

$$\frac{\partial}{\partial y}f(x, y) = \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right)_x \tag{227}$$

12.3　波動方程式

- **波動方程式**：変位 $y(x,t)$ に対する偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{228}$$

v：波の伝搬速度

- 隣接する媒質がバネ（弾性体）でつながれ、間の距離が無限小の極限をとる
  $\leftarrow$ バネの運動方程式から導出される

- 式 (221) は波動方程式 (228) の解
  確認）左辺は

$$\begin{aligned}
\frac{\partial y}{\partial x} &= A\frac{\partial}{\partial x}\sin(\omega t - kx) \\
&= A\frac{\partial}{\partial x}(\omega t - kx)\cos(\omega t - kx) \\
&= -kA\cos(\omega t - kx) \\
\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x} \\
&= -kA\frac{\partial}{\partial x}\cos(\omega t - kx) \\
&= -kA(-k)[-\sin(\omega t - kx)] \\
&= -k^2 A\sin(\omega t - kx) \\
&= -k^2 y
\end{aligned}$$

右辺は

$$\begin{aligned}
\frac{\partial y}{\partial t} &= \omega A\cos(\omega t - kx) \\
\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -\omega^2 A\sin(\omega t - kx) = -\omega^2 y \\
\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -\frac{\omega^2}{v^2}y \\
&= -k^2 y \quad \leftarrow (224) \\
&= (\text{左辺})
\end{aligned}$$

12.4　重ね合わせの原理

- **重ね合わせの原理**：斉次線形微分方程式の 2 つの解の線形結合が解になること
  斉次：定数項がない
  線形：未知関数の 1 乗の項しかない（2 乗、3 乗、ルート、三角関数などがない）

- 運動方程式の解の重ね合わせ
  - 単振動の運動方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \tag{229}$$

  - 2 つの解 $x_1(t)$ と $x_2(t)$ が式 (229) を満たすとき、以下の線形結合も式 (229) の解

$$x(t) = Ax_1(t) + Bx_2(t), \quad A, B \text{ 定数} \tag{230}$$

  - 確認：

$$\begin{aligned}
m\frac{d^2x}{dt^2} &= m\frac{d^2}{dt^2}(Ax_1 + Bx_2) \\
&= Am\frac{d^2x_1}{dt^2} + Bm\frac{d^2x_2}{dt^2} \\
&= A(-kx_1) + B(-kx_2) \quad \leftarrow (x_1, x_2 \text{ に対する運動方程式}) \\
&= -k(Ax_1 + Bx_2) \\
&= -kx
\end{aligned}$$

- 波動方程式の解の重ね合わせ
  - 波動方程式

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{231}$$

  - 2 つの解 $y_1(t, x)$ と $y_2(t, x)$ が式 (231) を満たすとき、以下の線形結合も式 (231) の解

$$y(t, x) = Ay_1(t, x) + By_2(t, x), \quad A, B \text{ 定数} \tag{232}$$

  - 確認：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}(Ay_1 + By_2) \\
&= A\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} \\
&= A\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + B\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} \quad \leftarrow (y_1, y_2 \text{ に対する波動方程式}) \\
&= \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(Ay_1 + By_2) \\
&= \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}
\end{aligned}$$

- 波動の重ね合わせ：2 つの波動を重ね合わせて新しい波動が作れる
  一般の波動：多数の三角関数の重ね合わせ（フーリエ級数展開、フーリエ変換）