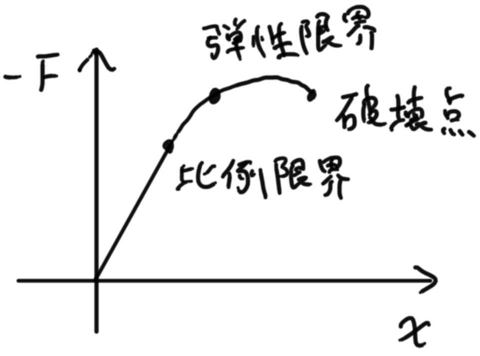
11　弾性体

教科書 p.115-p.118



11.1　弾性体とは

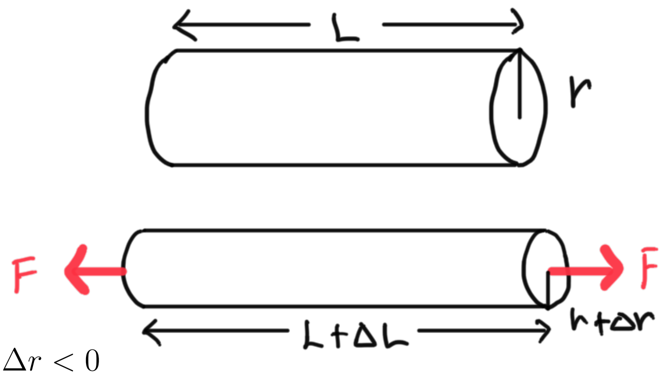
- **弾性体**：力を加えると変形する物体
  例）バネ、ゴム、固体など
- **弾性**：変形度が小さい場合に、力を取り除くと元の形に戻る性質 → 復元力がはたらく
- １次元の弾性体（バネ）のフックの法則：復元力 F は変位 x に比例（x が小さいとき）

$$F = -kx \tag{202}$$

  バネ定数 k はバネごとに異なる（材質固有の性質）

- 加える力をより強くしていくと
  - 比例限界：フックの法則が成り立たなくなる
  - 弾性限界：力を取り除いても元に戻らない（バネが伸びきる塑性変形）
  - 破壊点：弾性体が破壊される点（バネがちぎれる）
- ３次元の弾性体（ゴムの塊）：様々な変形と復元力が生じる、対応関係は（ただし符号と次元に注意）
  - 変位 → ひずみ
  - 復元力 → 応力
  - バネ定数 → 弾性定数
- 一般にはひずみと応力は空間の各点で定義されたテンソル
  以下では等方（どの方向も同じ）で一様（どの部分も同じ）な弾性体を考える

11.2　ひずみと応力



- 円柱型の弾性体を力 F で長さ方向に引っ張る
  - 変形前：長さ L、半径 r
  - 変形後：長さ $L + \Delta L$、半径 $r + \Delta r$
  - 変位：ΔL、Δr、どちらも微小量、通常は $\Delta r < 0$

- **微小量**：$\Delta L \ll 1$（ΔL は 1 より十分小さい）
  具体的に $\Delta L = 10^{-3} = 0.001$ とすると、

$$(\Delta L)^0 = 1, \quad (\Delta L)^1 = 10^{-3} = 0.001, \quad (\Delta L)^2 = 10^{-6} = 0.00001, \quad \cdots \tag{203}$$

  となるので $(\Delta L)^{n+1}$ は $(\Delta L)^n$ より十分小さい
  「微小量の 1 次まで考慮する」という場合、２次以上を

$$\mathcal{O}\big((\Delta L)^2\big) = a(\Delta L)^2 + b(\Delta L)^3 + \cdots \tag{204}$$

  という記号で表し、これを無視する

- **ひずみ**：単位長さあたりの変位、次元は無次元

$$(\text{ひずみ}) = \frac{\Delta L}{L} \tag{205}$$

  理由：変位 ΔL は弾性体の長さ L に比例するため（c.f. バネを２つ直列につなぐ）

- **応力**：弾性体の単位面積あたりにかかる力、次元は $L^{-1}MT^2$（圧力と同じ）

$$(\text{応力}) = \frac{F}{A}, \quad A = \pi r^2 \tag{206}$$

  符号は外向きが正（弾性体にはたらく力なので復元力と反対向き）

- フックの法則：ひずみが微小なとき、応力はひずみに比例

$$\frac{F}{A} = E\frac{\Delta L}{L} \tag{207}$$

  比例係数は**ヤング率** E、次元は $L^{-1}MT^2$

- **弾性定数**：ヤング率などの応力とひずみの比例係数

- **ポアソン比** σ：応力に垂直な方向（半径方向）のひずみと応力方向（長さ方向）のひずみの比

$$-\frac{\Delta r}{r} = \sigma\frac{\Delta L}{L} \tag{208}$$

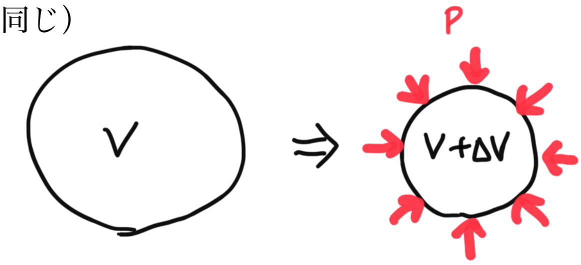
  通常は $\Delta L > 0$、$\Delta r < 0$（長さが伸びたら幅が縮む）なので $\sigma > 0$
  稀に $\sigma < 0$（長さが伸びたら幅が広がる）の物質も存在

- 硬い弾性体：E 大、σ 小
  やわらかい弾性体：E 小、σ 大
  体積一定の変形の場合は $\sigma = 1/2$（演習問題）

11.3　圧縮変形とずれ変形

- 圧縮変形：弾性体の表面全体に圧力 p（内向きが正）をかけて小さくする
  - 変形前：体積 V
  - 変形後：体積 $V + \Delta V$（体積変化 ΔV は微小量で符号は負）
- **体積弾性率** K、次元は $L^{-1}MT^{2}$（圧力と同じ）

$$p = -K\frac{\Delta V}{V} \tag{209}$$



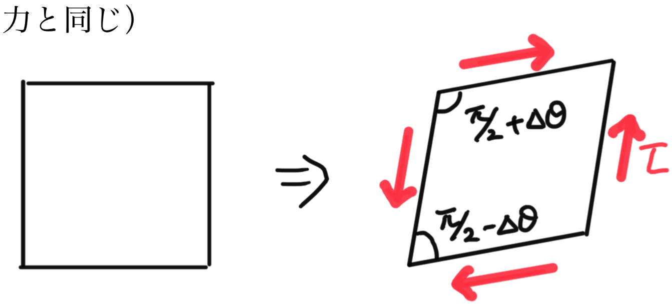
- 書き直して

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{1}{K}p \tag{210}$$

$1/K$ が大きい（小さい）：同じ圧力でより大きく（小さく）圧縮される
$\rightarrow 1/K$ は圧縮率と呼ばれる

- ずれ変形：断面が正方形の弾性体の側面に平行に応力 τ をかける
  - 変形前：断面の正方形の角度が $\pi/2$
  - 変形後：断面のひし形角度が $\pi/2 + \Delta\theta$ と $\pi/2 - \Delta\theta$、体積は変えない
- ずれ弾性率 μ、次元は $L^{-1}MT^{2}$（圧力と同じ）

$$\tau = \mu\Delta\theta \tag{211}$$



11.4　弾性定数の関係

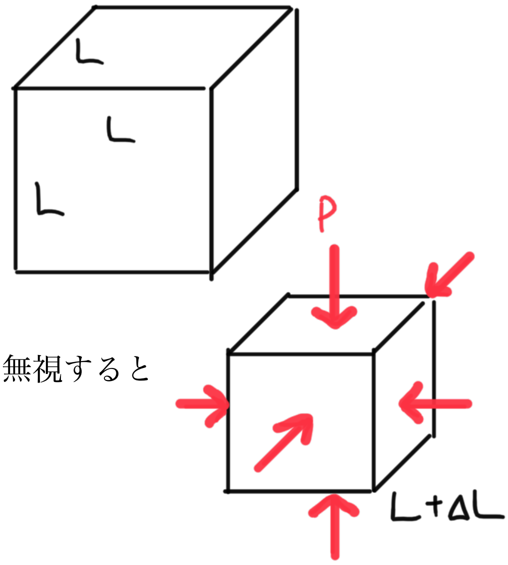
- 弾性定数の間の関係式

$$K = \frac{E}{3(1-2\sigma)} \tag{212}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\sigma)} \tag{213}$$

体積一定の変形はポアソン比が $\sigma \rightarrow 1/2$、このとき $K \rightarrow \infty$ で圧縮できない（非圧縮）

- 式 (212) の説明：
  - 一辺の長さ L の立方体の全ての面に圧力 p を加え、各辺が $L + \Delta L$（ΔL は微小量で符号は負）に変化した場合



– 体積弾性率：体積変化は

$$\begin{aligned}\Delta V &= (L+\Delta L)^3 - L^3\\ &= \left[L^3 + 3L^2\Delta L + \mathcal{O}\big((\Delta L)^2\big)\right] - L^3\\ &= 3L^2\Delta L + \mathcal{O}\big((\Delta L)^2\big)\end{aligned}$$

であり各面の圧力は p なので、ΔL の 2 次以上を無視すると

$$\begin{aligned}p &= -K\frac{\Delta V}{V}\\ p &= -K\frac{3L^2\Delta L}{L^3}\\ \frac{\Delta L}{L} &= -\frac{1}{3K}p\end{aligned}\tag{214}$$

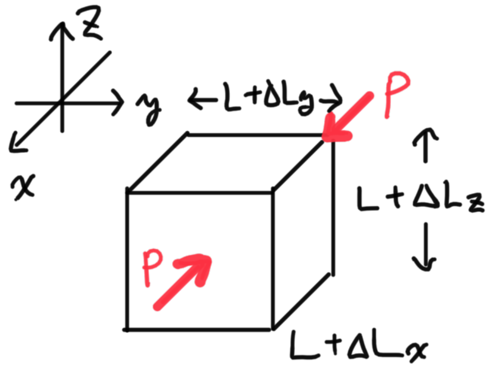
– ヤング率とポアソン比：x, y, z 3 方向の力を別々に考える
x 方向の変位は x 方向の圧力の効果（短くする）だけでなく y, z 方向からの圧力の効果（長くする）が加わる

– x 方向の応力は $-p$（符号は外向きが正）で、x 方向の長さ変化を ΔL_x とすると（長さが縮む）

$$\begin{aligned}-p &= E\frac{\Delta L_x}{L}\\ \frac{\Delta L_x}{L} &= -\frac{1}{E}p\end{aligned}\tag{215}$$

x 方向の応力による y, z 方向の長さ変化を ΔL_y、ΔL_z とすると（長さが伸びる）

$$\begin{aligned}-\frac{\Delta L_y}{L} &= \sigma\frac{\Delta L_x}{L}\\ \frac{\Delta L_y}{L} &= -\sigma\left(-\frac{1}{E}p\right) = \frac{\sigma}{E}p\\ \frac{\Delta L_z}{L} &= \frac{\sigma}{E}p\end{aligned}\tag{216}$$



– y 方向の応力による x 方向のひずみは

$$\frac{\Delta L_x}{L} = \frac{\sigma}{E}p\tag{217}$$

z 方向の応力による x 方向のひずみは

$$\frac{\Delta L_x}{L} = \frac{\sigma}{E}p\tag{218}$$

– x 方向のひずみを全て合計すると $\Delta L/L$ なので（y, z 方向の面も同じ）

$$\frac{\Delta L}{L} = -\frac{1}{E}p + \frac{\sigma}{E}p + \frac{\sigma}{E}p = -\frac{1}{E}(1-2\sigma)p\tag{219}$$

式 (214) と比較して

$$\begin{aligned}-\frac{1}{3K} &= -\frac{1}{E}(1-2\sigma)\\ K &= \frac{E}{3(1-2\sigma)}\end{aligned}\tag{220}$$