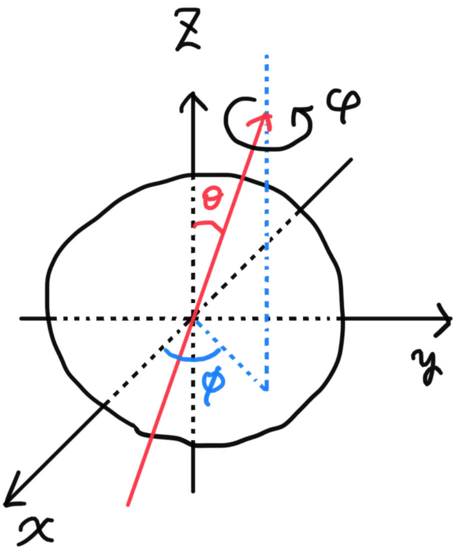
10　剛体の運動

教科書 p.93-p.100

10.1　剛体の運動

- **剛体**：**大きさ**を持った変形しない物体
  - 例）棒、コマ、滑車など
  - 現実の物質は少しは変形するので、完全な剛体は理想化
  - 球体などの場合も**向き**が区別できると考える（c.f. 地球）
  - 質点の集まりで、間の距離が変わらないものと考えられる
    （原子を質点と考えれば、現実の物質はアボガドロ数ほどの個数の質点の集まり）

- 剛体の次元
  - 0 次元の剛体：大きさのない点（= 質点）
  - 1 次元の剛体：太さのない棒（棒の長さは様々）
  - 2 次元の剛体：厚さのない板（板の輪郭は様々）
  - 3 次元の剛体：通常の物体（表面の形は様々）



- **自由度**：系の状態を指定するために必要な変数の数
  例）1 つの質点の 3 次元運動：3 自由度（変数 x, y, z）
  　　2 つの質点の 3 次元運動：6 自由度（$x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$）
  　　n 個の質点の 3 次元運動：$3n$ 自由度

- 剛体の自由度は（3 次元運動の場合）？
  - 剛体の**位置**を表す重心座標 3 つ：$\vec{R} = (R_x, R_y, R_z)$
    太陽を座標原点とした場合、地球の公転運動は $\vec{R}$ が決まる
  - 剛体の**向き**を表す角度 3 つ
    回転軸の向きを決める 3 次元極座標 θ, ϕ とその軸の周りの回転角 φ
    同じ $\vec{R}$ にいる地球も自転すると異なる状態になる
    地軸まわりの回転が φ（太陽側に日本があるかアメリカがあるか）
    地軸そのものの向きを θ, ϕ が決める（地球の場合はほぼ固定）
  - 全体で**自由度 6**：運動方程式は合計 6 つ
  - 1 次元の剛体でも 3 次元運動が可能（棒を振り回す）なので 6 自由度

10.2 剛体の質量と重心

- 3 次元の剛体
  - 剛体の全質量 M：質量密度 $\rho(\vec{r})$ の体積積分（$dV = dxdydz$）

$$M = \int \rho(\vec{r})\ dV \tag{184}$$

  - 質量密度 $\rho(\vec{r})$：単位体積あたりの質量、次元は ML^{-3}
  - 剛体の重心座標：座標 $\vec{r}$ をかけた質量密度 $\rho(\vec{r})$ の体積積分

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\int \rho(\vec{r})\ \vec{r}\ dV \tag{185}$$

- 1 次元の剛体（x 軸上に配置した場合）
  - 剛体の全質量 M：線密度 $\lambda(x)$ の積分

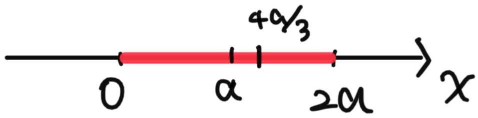
$$M = \int_{x_L}^{x_R} \lambda(x)\ dx \tag{186}$$

    積分の範囲は剛体の端の x 座標 x_L から反対の端 x_R まで
  - **線密度** $\lambda(x)$：単位長さあたりの質量、次元は ML^{-1}
    位置 x に依存して密度が異なっても良い（部分によって材質が異なるなど）
    一様な剛体（どの位置 x でも同じ線密度）の場合、定数 $\lambda(x) = \lambda_0$
  - 剛体の重心座標：座標 x をかけた線密度 $\lambda(x)$ の積分

$$R_x = \frac{1}{M}\int_{x_L}^{x_R} \lambda(x)\ x\ dx \tag{187}$$

- 例 1）一様線密度 λ_0 の 1 次元の剛体、端点が $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ と $(2a, 0, 0)$

$$M = \int_0^{2a} \lambda_0\ dx = \lambda_0\,[x]_0^{2a} = 2a\lambda_0 \tag{188}$$



棒の長さ $2a$ に線密度 λ_0 をかけたもの

$$R_x = \frac{1}{M}\int_0^{2a} \lambda_0\ x\ dx = \frac{\lambda_0}{M}\int_0^{2a} x\ dx = \frac{\lambda_0}{2a\lambda_0}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{2a} = \frac{1}{2a}\frac{4a^2}{2} = a \tag{189}$$

棒の長さの中心 $x = a$ が重心 R_x になる
重心の y, z 座標は $R_y = 0, R_z = 0$

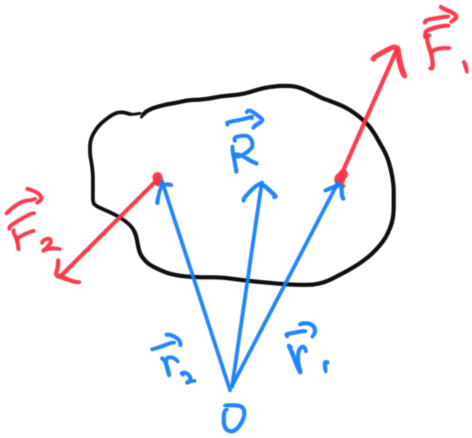
- 例 2）線密度 $\lambda(x) = bx$ の 1 次元の剛体、端点が $(0, 0, 0)$ と $(2a, 0, 0)$

$$M = \int_0^{2a} \lambda(x)\ dx = b\int_0^{2a} x\ dx = b\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{2a} = \frac{4a^2b}{2} = 2a^2b \tag{190}$$

$$R_x = \frac{1}{M}\int_0^{2a} bx\ x\ dx = \frac{b}{2a^2b}\int_0^{2a} x^2\ dx = \frac{1}{2a^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{2a} = \frac{8a^3}{6a^2} = \frac{4}{3}a \tag{191}$$

x が大きい方が重いので、重心が $x = a$ より大きい位置にある

10.3 剛体の運動方程式



- 位置 $\vec{r}_1$ に力 $\vec{F}_1$ が、$\vec{r}_2$ に $\vec{F}_2$ がはたらいている剛体

- **力の作用点**：$\vec{r}_1$、$\vec{r}_2$
  質点の場合、力の作用点は常に質点の位置座標
  剛体の場合、重心座標以外の点に力が作用できる

- 重心の運動方程式（3 自由度）

$$M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \vec{F}, \quad \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \tag{192}$$

- 力の釣り合い：合力が消える場合

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0} \tag{193}$$

  重心は等速直線運動（最初に静止していれば静止）
  釣り合い条件は力の**作用点に無関係**

- 座標原点まわりの回転の運動方程式（3 自由度）

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}, \quad \vec{N} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 \tag{194}$$

  $\vec{L}$ は座標原点まわりの剛体の角運動量

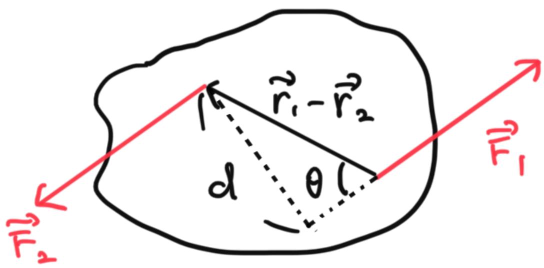
- 力のモーメントの釣り合い：力のモーメントの和が消える場合

$$\vec{N} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2 = \vec{0} \tag{195}$$

  剛体は等速回転運動（最初に静止していれば回転しない）
  釣り合い条件は力の**作用点に依存**

- 力の作用点によっては、$\vec{F} = \vec{0}$ でも $\vec{N} \neq \vec{0}$ の場合がある
  例）偶力：剛体の異なる部分に大きさが同じで反平行（平行で向きが逆）の力が作用する

$$\begin{aligned}
&\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = \vec{F}_{偶} \\
&\vec{r}_1 \neq \vec{r}_2 \\
&\vec{N} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 \\
&\quad = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{偶} + \vec{r}_2 \times (-\vec{F}_{偶}) \\
&\quad = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{偶}
\end{aligned}$$



  力のモーメントの大きさ $|\vec{N}| = d|\vec{F}_{偶}|$ は作用線間の距離 $d = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|\sin\theta$ のみで決まる
  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$ なので偶力は重心に加速度を与えない

10.4 剛体の慣性モーメント

- 回転軸を z 軸に固定した場合、回転の運動方程式は

$$\frac{dL_z}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = N_z \tag{196}$$

  I：剛体の慣性モーメント

- 3 次元の剛体の慣性モーメント：回転軸から位置 $\vec{r}$ までの距離 $r_\perp$ の 2 乗をかけた質量密度 $\rho(\vec{r})$ の体積積分

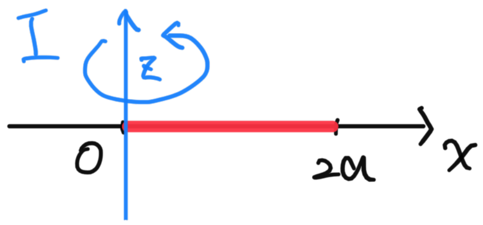
$$I = \int \rho(\vec{r})\ r_\perp^2\ dV, \quad r_\perp^2 = x^2 + y^2 \tag{197}$$

- 1 次元の剛体の慣性モーメント（線密度 $\lambda(x)$、端点 $x = x_L$、x_R）

$$I = \int_{x_L}^{x_R} \lambda(x)\ x^2\ dx \tag{198}$$

- 例 1）一様線密度 λ_0 の 1 次元の剛体、端点が $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ と $(2a, 0, 0)$

$$I = \int_0^{2a} \lambda_0\ x^2\ dx = \lambda_0 \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{2a} = \frac{8\lambda_0 a^3}{3} \tag{199}$$



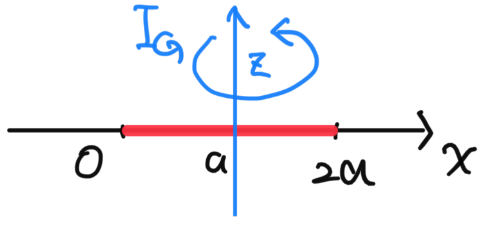
  全質量 $M = 2a\lambda_0$ を用いると

$$I = \frac{4(2\lambda_0 a)a^2}{3} = \frac{4Ma^2}{3} \tag{200}$$

  棒の端点を中心に回転する場合の慣性モーメント

- 例 2）一様線密度 λ_0 の 1 次元の剛体、端点が $(x, y, z) = (-a, 0, 0)$ と $(a, 0, 0)$
  計算は演習問題：

$$I_G = \frac{Ma^2}{3} \tag{201}$$



  棒の重心を中心に回転する場合の慣性モーメント

- 慣性モーメントは回転に対する "質量"
  $I > I_G$ より、棒は端点まわりより重心まわりの方が回転させやすい