

教養基礎物理 IIc 演習問題 [第14回] 提出期限：2021.2.2 (2021.1.26 出題)

結果だけでなく途中の式と説明も書くこと。

1. 外力のない場合のナビエ・ストークス方程式は

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \frac{\mu}{\rho} \vec{\nabla}^2 \vec{v} \quad (1)$$

と与えられる。 $\vec{v}(t, x, y, z)$ は流速ベクトル (各成分は v_x, v_y, v_z)、 $p(t, x, y, z)$ は圧力、 ρ は密度、 μ は粘性係数、微分演算子 $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right)$ は各成分が位置の偏微分であるベクトルである。通常のベクトルと同様に、 $\vec{\nabla}$ の 2 乗は内積 $\vec{\nabla}^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$ で与えられる。微分演算子 $\frac{\partial}{\partial x}$ は右にある変数を微分する。例えば $\vec{\nabla}$ が p に、 $\frac{\partial}{\partial x}$ が \vec{v} に作用する (左からかかる) と

$$\vec{\nabla} p = \left(\frac{\partial p}{\partial x} \quad \frac{\partial p}{\partial y} \quad \frac{\partial p}{\partial z} \right), \quad \frac{\partial}{\partial x} \vec{v} = \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} v_x & v_y & v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} \end{pmatrix}$$

のようになる。方程式 (1) の x 成分を成分表示で具体的にあらわせ。

2. 一様な流速 (流速ベクトルの大きさが $|\vec{v}| = v$ で一定) の流れの中に長さ L の物体を置く。このとき、新しい流速と微分

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{v}, \quad \vec{\nabla}_L = \frac{\vec{\nabla}}{1/L} = L \vec{\nabla}$$

を定義すると、 \vec{u} は v を単位として測った流速、 $\vec{\nabla}_L$ は $1/L$ を単位として測った長さ微分で、どちらも無次元になる。このように、変数を同じ次元の量で割ることを「無次元化する」という。時間 t 、圧力 p に L 、 v 、 ρ をかけることで、無次元化した時間 \tilde{t} 、無次元化した圧力 \tilde{p} を与え、無次元化した変数 \vec{u} 、 $\vec{\nabla}_L$ 、 \tilde{t} 、 \tilde{p} を用いてナビエ・ストークス方程式を書け。

講義についての質問や、ご意見ご要望があれば末尾に書いてください。