

カオス時系列のダイナミクスの推定と予測 (第二報)
— 拡張カルマンフィルタによる Lorenz 方程式のダイナミクスの
推定と予測について —

河村 明*・松本 実**
神野 健二*・許 士国***

Estimation and Prediction for Dynamics of Chaotic Time Series (II)
On the Estimation and Prediction for Dynamics of Lorenz Equation by
Extended Kalman Filter

Akira KAWAMURA, Minoru MATSUMOTO,
Kenji JINNO and Shiguo XU

(Received July 4, 1994)

Abstract: Traditionally, a stochastic approach has been applied to the analysis of hydro-meteorological time series, but recent findings indicate that many hydro-meteorological time series possess chaotic characteristics. In this series of research, a deterministic dynamical system which represents chaotic behavior is studied using the time series from the Lorenz equation. In this paper, the extended Kalman filter (EKF) is employed as an on-line prediction method to identify the Lorenz parameters and to predict its time series for the two cases. In one case the structure of system dynamics is given by the Lorenz equation, and the other case the structure is unknown. The results show that the identification and the prediction by EKF are carried out much more precisely than those by the nonlinear least square method as an off-line prediction method. The characteristics of EKF on estimation and prediction for dynamics of chaotic time series are also presented.

Keywords: Extended Kalman filter, Lorenz equation, Parameter identification, On-line prediction, Chaotic time series

1. はじめに

著者らは別報¹⁾において、カオス時系列のダイナミクスの推定と予測に関する研究の第一段階として、Lorenz 方程式を対象に、まず初期値およびパラメータに対する依存性について検討した後、システムダイナミクスの構造が既知および未知の場合に対して、オフラインとしての非線形最小二乗法により、パラメータの同定および時系列の予測を行った。その結果、非線形最小二乗法では、特にシステムダイナミクスの構造

が未知の場合には、初期パラメータを真値のかなり近傍に設定しない限り解が収束しないことを示し、オフライン予測としての非線形最小二乗法の問題点を指摘した。そこで本報では、カオス時系列に対し真値から外れた初期パラメータを用いる場合に、観測時系列の値をフィードバックすることにより、これをオンラインで逐次更新することを試みる。すなわち、オンライン予測手法としての拡張カルマンフィルタにより、カオス時系列のパラメータ同定およびその時系列予測を行い、これを別報の非線形最小二乗法による結果¹⁾と比較することにより、本手法のカオス時系列への適用性および特性について検討を行う。この場合、適用するカオス時系列としては別報¹⁾と同様、Lorenz 方程式より生成された時系列 x を用いるものとし、システムダイナミクスの構造が既知および未知の場合につい

平成6年7月4日 受理

* 建設都市工学教室

** 水工土木学専攻修士課程

*** 大連理工大学土木工学科

(現、九州大学訪問研究員)

て検討する。

2. システムダイナミクスの構造が既知の場合 に対する適用

2.1 対象時系列

別報¹⁾と同様、次式で表される Lorenz 方程式²⁾を対象とする。

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y-x) \\ \dot{y} = Rx - y - xz \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \quad (1)$$

ここに、 \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} は x , y , z の時間 t に関する微分、 σ , R , b はパラメータである。ここで別報¹⁾と同様に $\sigma = 10$, $R = 28$, $b = 8/3$, また、時間間隔 $\Delta t = 0.005$ とし、 $t = 0$ における時系列 x , y , z の初期値 $\{x(0), y(0), z(0)\} = \{10, 10, 10\}$ として、Runge-Kutta-Gill 法 (RKG 法) により式(1)を数値計算し、得られた時系列を Lorenz 方程式の真の時系列とする。

2.2 拡張カルマンフィルターによる定式化

カルマンフィルター理論は、式(2)で表される状態方程式に従って遷移するシステム状態量 X を推定する理論であり、状態量 X は式(3)の観測方程式を通してのみ観測される³⁾。

$$X(k+1) = \Phi(k)X(k) + \alpha(k) + u(k) \quad (2)$$

$$Y(k+1) = H(k+1)X(k+1) + \beta(k+1)w(k+1) \quad (3)$$

ここに、 k : 時点、 X : システム状態量ベクトル、 Φ : 状態遷移行列、 α : 定数ベクトル、 u : システム雑音ベクトル、 Y : 観測量ベクトル、 H : 既知の観測行列、 β : 定数ベクトル、 w : 観測雑音ベクトル

状態方程式(2)と観測方程式(3)が定式化されれば、状態量 X の最適推定量 \hat{X} および観測量 Y の予測は、カルマンフィルターのアルゴリズムに従い逐次求められる^{4),5)}。

さてカルマンフィルターで推定すべきシステム状態量として式(1)における x , y , z およびパラメータ σ , R , b をとる⁶⁾。すなわち状態量 $X = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6]^T = [x \ y \ z \ \sigma \ R \ b]^T$ (T : 転置) とする。 X の遷移方程式は、 $F(X)$ を X のベクトル関数 $F = [f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4 \ f_5 \ f_6]^T$ とすると、式(1)より次式で表される。

$$\dot{X} = F(X) \quad (4)$$

すなわち、

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(X) = x_4(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 = f_2(X) = x_5x_1 - x_2 - x_1x_3 \\ \dot{x}_3 = f_3(X) = x_1x_2 - x_6x_3 \\ \dot{x}_i = f_i(X) = 0 \quad (i = 4 \sim 6) \end{cases} \quad (5)$$

ここで、非線形ベクトル関数 $F(X)$ を X の近傍 X^* において Taylor 級数展開し、1次の項までとり線形化すると次式となる。

$$F(X) = J(X^*)X + B(X^*) \quad (6)$$

ここに J はヤコビアン行列であり、

$$B(X^*) = F(X^*) - J(X^*)X^* \quad (7)$$

であるので、式(4)は次式となる。

$$\dot{X} = J(X^*)X + B(X^*) \quad (8)$$

式(8)は線形微分方程式であるが、計算機での計算を容易にするために、時間間隔 Δt で次の差分方程式に変換⁷⁾し、システム雑音 $u(k)$ を加えると、式(2)の状態方程式は次式となる。

$$X(k+1) = \Phi(X^*)X(k) + \Gamma(X^*)B(X^*) + u(k) \quad (9)$$

ここに、

$$\begin{cases} \Phi(X^*) = e^{J(X^*)\Delta t} = I + J(X^*)\Delta t + \dots \\ \quad + \{J(X^*)\Delta t\}^m/m! + \dots \\ \Gamma(X^*) = (e^{J(X^*)\Delta t} - I)J^{-1}(X^*) \\ \quad = \Delta t[I + J(X^*)\Delta t/2! \\ \quad + \dots + \{J(X^*)\Delta t\}^{m-1}/m! + \dots] \end{cases} \quad (10)$$

すなわち式(2)の $\Phi(k)$, $\alpha(k)$ はそれぞれ式(9)の $\Phi(X^*)$, $\Gamma(X^*)B(X^*)$ に対応している。なお本報では、式(10)の4次の項まで取り入れて計算を行っている。

次に観測方程式(3)については、別報¹⁾と同様、 x_1 要素すなわち時系列 x のみが観測されるとすると、 $H = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$, $\beta = 0$ となる。

2.3 適用結果と考察

非線形状態方程式を Taylor 展開し1次項までを考慮する上記の拡張カルマンフィルターを、Lorenz 方程式から生成される x 時系列のみが観測されるとして

適用する。なお、元の Lorenz 方程式である式(4)を式(8)で線形化したことによる誤差は、 $\Delta t = 0.005$ とした1,000ステップの時系列で比較した結果、ほとんど無視できる程度に小さいことを確認している。ここで状態量 \mathbf{X} の初期推定値 $\hat{\mathbf{X}}(0)$ として、時系列 x, y, z の初期値 $x(0), y(0), z(0)$ には前述の基準値 {10, 10, 10, }を与え、パラメータ σ, R, b については真値の150%を与えた。システム雑音 \mathbf{u} の共分散行列には $\hat{\mathbf{X}}(0)$ の共分散の1%を与え、観測雑音 w の分散は 0.1^2 とした。また、初期推定値 $\hat{\mathbf{X}}(0)$ の推定誤差共分散行列 $\mathbf{P}(0)$ の各成分は、 $\hat{\mathbf{X}}(0)$ の値を考慮し、 $10^2 \sim 10^3$ 程度の値を適当に与えた。図-1に、時系列 x のみの観測から時系列 x, y, z の100ステップ先を予測した結

果およびパラメータ σ, R, b の同定過程を示している。図-1より、パラメータ σ, R, b の初期推定誤差は速やかに補償され、真値に素早く一致している。その結果、パラメータ同定値が収束した後は、観測時系列 x 、非観測時系列 y, z の100ステップ先の予測も非常に精度良く行われている。この場合、パラメータの真値が速やかに精度良く同定されているため、数百ステップ先の予測であっても、100ステップ先のそれと同程度に精度良く時系列 x, y, z が予測できることを確認している。この結果を、別報の非線形最小二乗法(NLSM)による結果である図-8¹⁾と比較すると、非線形最小二乗法では、観測時系列 x の予測区間および非観測時系列 y, z の誤差が大きくなっているのに対

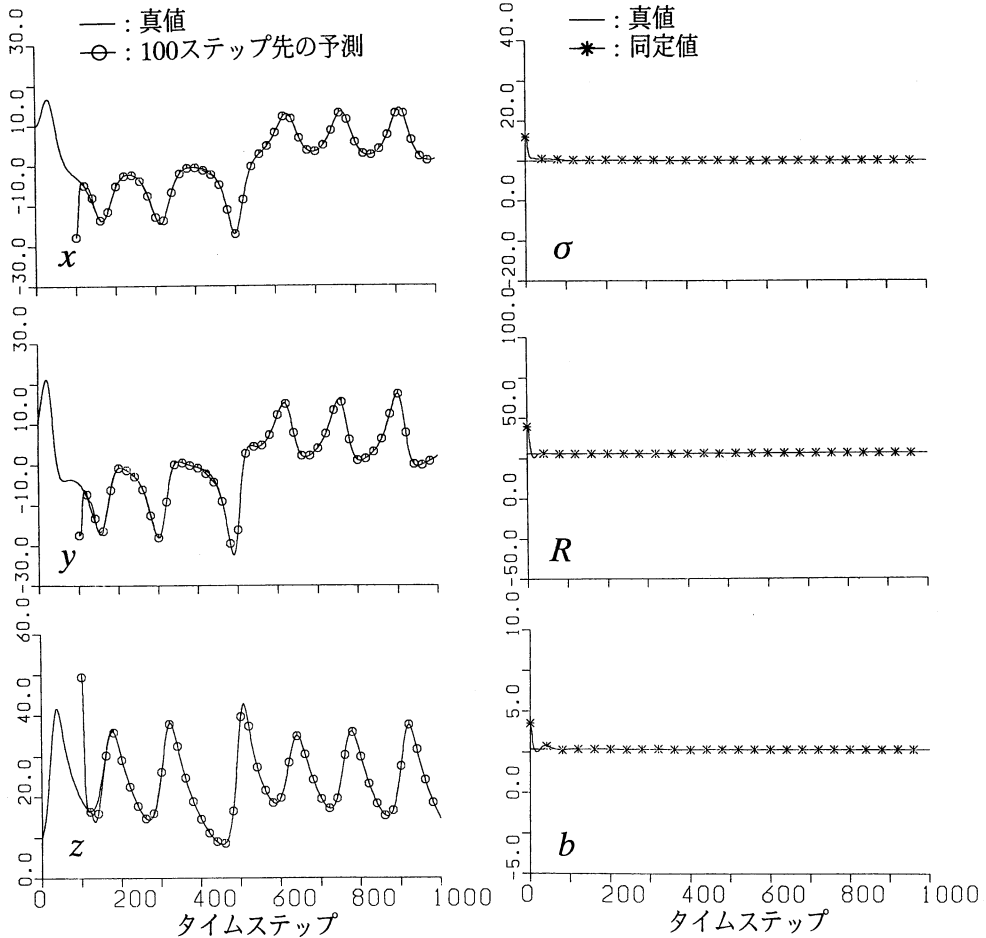


図-1 拡張カルマンフィルターによる時系列予測およびパラメータ同定 (時系列の初期値 (10, 10, 10), パラメータの初期値は真値の150%)

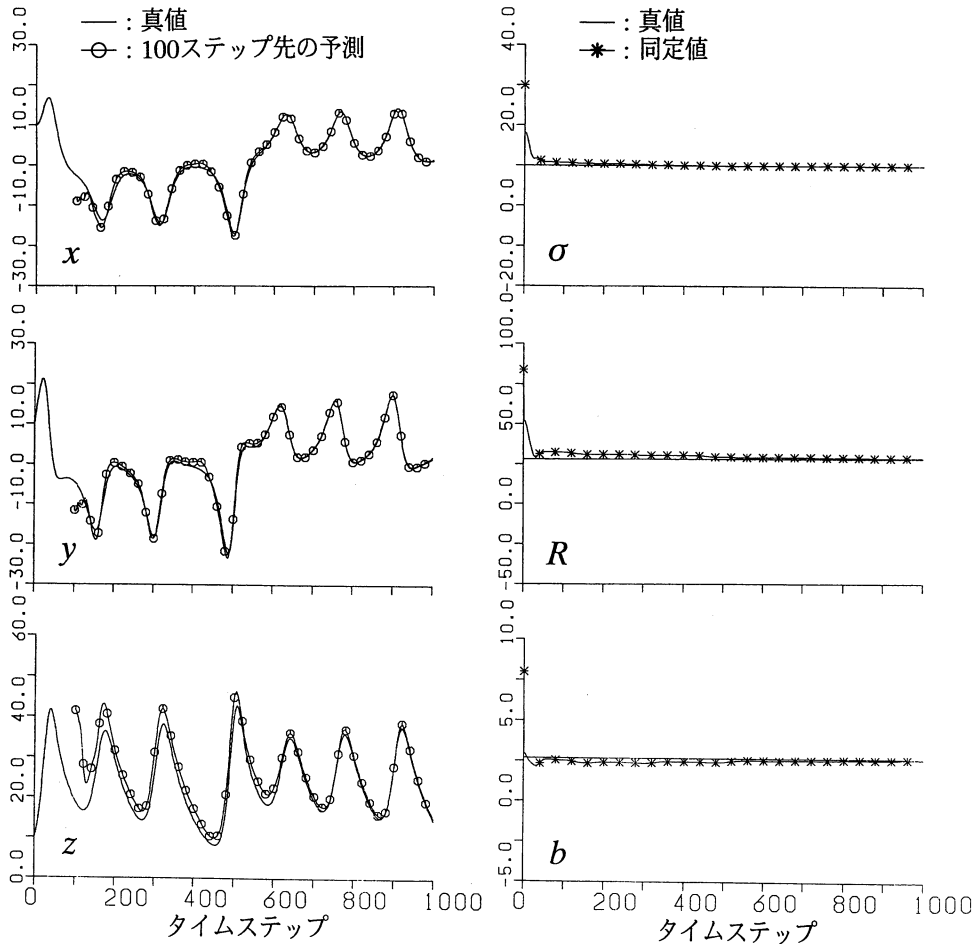


図-2 拡張カルマンフィルタによる時系列予測およびパラメータ同定
 (時系列の初期値 {20, 20, 20}, パラメータの初期値は真値の 300%)

し、本手法ではいずれも非常に精度良く予測が行われている。

次に、本手法の初期条件をさらに厳しく、パラメータ σ , R , b の初期推定値を真値の 300% とし、しかも時系列 x , y , z の初期値を基準値 {10, 10, 10} 以外の値として、基準値の 2 倍の値である {20, 20, 20} から出発させて計算を行った結果を図-2 に示している。図-2 より、パラメータの値は速やかにほぼ真値に収束しており、100 ステップ先の時系列予測も図-1 に比べ、特に時系列 z に対して若干予測誤差がみられるものの、精度良く行われていることが分かる。なお、100 ステップ先の予測値の初期誤差が図-1 に比べて小さいのは、 σ , R , b を真値の 300% にとり、時系列の初

期値を基準値の 2 倍にとった場合の計算値が、偶然 Lorenz 時系列の近傍の値となったためである。

以上より、システムダイナミクスの構造が既知の場合、パラメータの初期推定値および時系列の初期値にかなりの誤差があっても、拡張カルマンフィルタによりそれらの誤差は速やかに補償され、精度よい同定と時系列予測が可能であることが示された。

3. システムダイナミクスの構造が未知の場合に対する適用

3.1 一般的な非線形微分方程式に対する拡張カルマンフィルタの定式化

時系列を支配するシステムダイナミクスの次元 (独

立変数の数) については, 時系列のフラクタル次元を計算することにより決定することができる^{8),9)} ことは別報¹⁾でも述べた。ここでは, 3元連立常微分方程式である Lorenz 方程式を対象として取り上げているので, システムダイナミクスの独立変数が3の場合を例にとり定式化を行う。3つの変数を x, y, z とし, それらのシステムダイナミクスが1階の非線形連立常微分方程式で表されると仮定する。そしてその非線形微分方程式の関数 $f(x, y, z)$ を Taylor 展開し, 2次の項までとる以下の方程式を考える^{1),10)}。

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y, z) = a_{10} + a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ \quad + a_{14}xy + a_{15}yz + a_{16}zx \\ \quad + a_{17}x^2 + a_{18}y^2 + a_{19}z^2 \\ \dot{y} = f_2(x, y, z) = a_{20} + a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ \quad + a_{24}xy + a_{25}yz + a_{26}zx \quad (11) \\ \quad + a_{27}x^2 + a_{28}y^2 + a_{29}z^2 \\ \dot{z} = f_3(x, y, z) = a_{30} + a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \\ \quad + a_{34}xy + a_{35}yz + a_{36}zx \\ \quad + a_{37}x^2 + a_{38}y^2 + a_{39}z^2 \end{cases}$$

ここに, $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ は x, y, z の時間 t に関する微分, $a_{ij}(i=1\sim 3, j=0\sim 9)$ はシステムパラメータである。

さて, カルマンフィルターで推定すべきシステム状態量 X として式(11)における x, y, z および a_{ij} をとる。すなわち X の要素数は33であり, $X = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{32} \ x_{33}]^T = [x \ y \ z \ a_{10} \ \dots \ a_{19} \ a_{20} \ \dots \ a_{29} \ a_{30} \ \dots \ a_{39}]^T$ とする。 X の遷移方程式は, $F(X)$ を X のベクトル関数 $F = [f_1 \ f_2 \ \dots \ f_{32} \ f_{33}]^T$ とすると, 次(11)より次式で表される。

$$\dot{X} = F(X) \quad (12)$$

すなわち,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(X) = x_4 + x_5x_1 + x_6x_2 + x_7x_3 \\ \quad + x_8x_1x_2 + x_9x_1x_3 + x_{10}x_2x_3 \\ \quad + x_{11}x_1^2 + x_{12}x_2^2 + x_{13}x_3^2 \\ \dot{x}_2 = f_2(X) = x_{14} + x_{15}x_1 + x_{16}x_2 + x_{17}x_3 \\ \quad + x_{18}x_1x_2 + x_{19}x_1x_3 + x_{20}x_2x_3 \\ \quad + x_{21}x_1^2 + x_{22}x_2^2 + x_{23}x_3^2 \quad (13) \\ \dot{x}_3 = f_3(X) = x_{24} + x_{25}x_1 + x_{26}x_2 + x_{27}x_3 \\ \quad + x_{28}x_1x_2 + x_{29}x_1x_3 + x_{30}x_2x_3 \\ \quad + x_{31}x_1^2 + x_{32}x_2^2 + x_{33}x_3^2 \\ \dot{x}_i = f_i(X) = 0 \quad (i = 4\sim 33) \end{cases}$$

ここで 2.2 と同様に, 非線形ベクトル関数 $F(X)$ を X の近傍 X^* において Taylor 級数展開し, 1次の項までとり線形化することにより, 状態方程式(9)が得られる。また観測方程式(3)については, Lorenz 方程式の x 時系列のみが観測されるとすると, $H = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$, $\beta = 0$ となる。なお, 式(11)を Lorenz 方程式(1)に適用した場合の各パラメータ $a_{ij}(i=1\sim 3, j=0\sim 9)$ の真値は, $a_{11} = -\sigma = -10$, $a_{12} = \sigma = 10$, $a_{21} = R = 28$, $a_{22} = -1$, $a_{26} = -1$, $a_{33} = -b = -8/3$, $a_{34} = 1$, その他のパラメータは0である。

3.2 適用結果と考察

状態量 X の初期推定値 $\hat{X}(0)$ としては, 別報の非線形最小二乗法と同様の条件¹⁾を設定した。すなわち時系列 x, y, z の初期値 $x(0), y(0), z(0)$ には基準値 $\{10, 10, 10\}$ をとり, 真値が0のパラメータについては一律に0.01を, 真値が0でない Lorenz 方程式に対応する7つのパラメータ $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, a_{26}, a_{33}, a_{34}$ については真値の160%を与えた。システム雑音 u の共分散行列には $\hat{X}(0)$ の共分散の1%を, 観測雑音 w の分散は 0.1^2 を与えた。また, 初期推定値 $\hat{X}(0)$ の推定誤差共分散行列 $P(0)$ の各成分には, $\hat{X}(0)$ の値を考慮して $10^{-4}\sim 10^3$ の範囲の値を適当に与えた。図-3に, 時系列 x のみの観測から, 時系列 x, y, z の1ステップおよび100ステップ先を予測した結果, および各パラメータの同定を1,000ステップ行った結果を(一部パラメータについて)示している。図-3より, 真値が0のパラメータ a_{37} については, ほぼ真値の0に収束している。また, Lorenz 方程式に対応する各パラメータ a_{11}, a_{21}, a_{34} については, 真値に近い値を同定しているもの (a_{11}, a_{34}) もあれば, 真値から外れて収束しているものもある (a_{21})。次に, 観測時系列 x の1ステップ先の予測については非常に精度よく行われている。また100ステップ先の予測についても, 初期時点で誤差が生じているものの, 500時点以降は精度よい予測となっている。しかし非観測時系列である y, z の予測結果をみると, 特に時系列 z については, 1ステップ先および100ステップ先ともに系統的な誤差を生じている。さてこれらの結果を, 第一報の非線形最小二乗法の結果である表-2¹⁾と比較すると, 非線形最小二乗法では, Lorenz 方程式に対応するパラメータの初期推定値が160%の場合は, 解が発散しているのに対し, 本手法ではパラメータもかなり精度良く同定され, 100ステップ先の時系列も, 初期誤差が収束した後は比較的精度良く予測されているといえる。これより, 観測

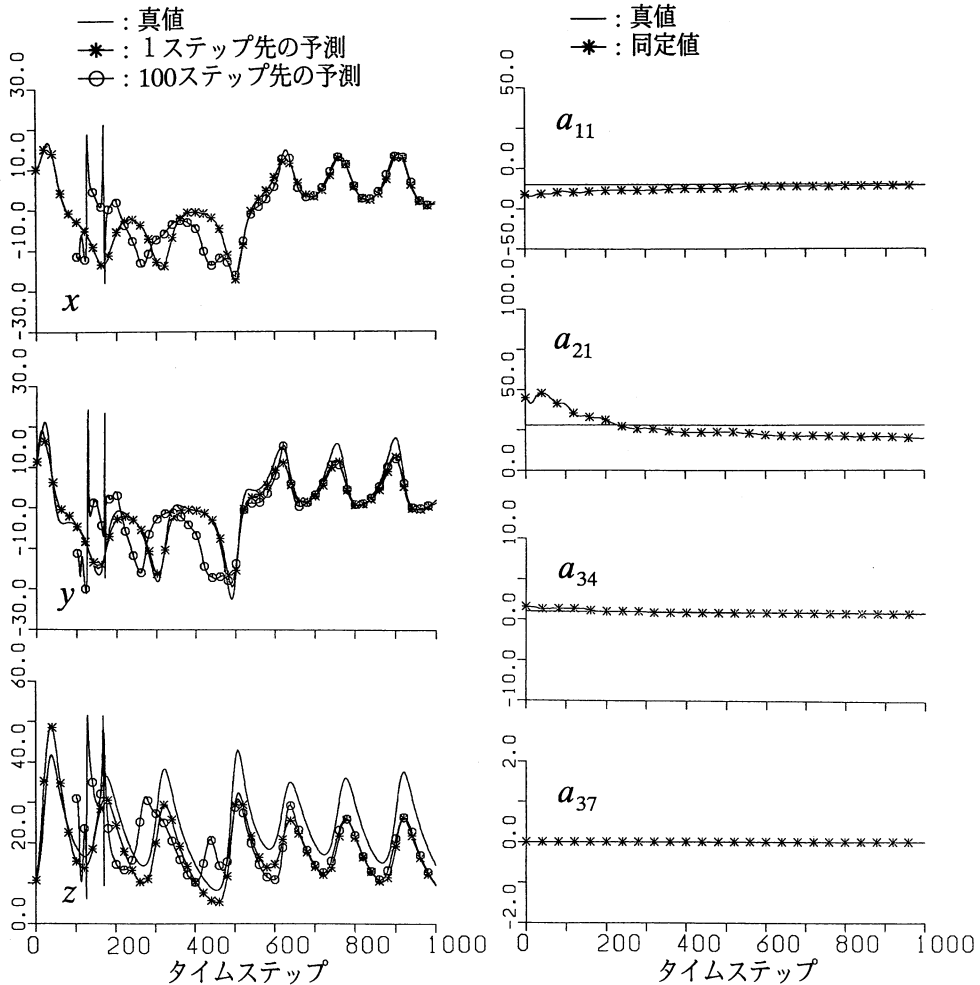


図-3 拡張カルマンフィルタによる時系列予測およびパラメータ同定
 (時系列の初期値 (10, 10, 10), Lorenz パラメータの初期値は真値の 160%, その他の
 パラメータの初期値は一律 0.01)

値のフィードバックによるオンライン逐次予測手法である拡張カルマンフィルタの、カオス時系列予測に対する有効性が示された。

次に、本手法の初期条件をさらに厳しく、Lorenz 方程式に対応する 7 つのパラメータの初期推定値を真値の 300% とし、また時系列 x, y, z の初期値を基準値 {10, 10, 10} 以外の値として、基準値の 2 倍である {20, 20, 20} から出発させて計算を行った結果を図-4 に示している。図-4 より、同定結果は、真値が 0 のパラメータ a_{37} については、ほぼ真値の 0 に収束しているものの、Lorenz 方程式に対応する 7 つのパラメータにつ

いては、 a_{11} のように収束に時間を要したり、 a_{21} のように真値から外れた値を同定しているものもある。その結果、観測時系列 x の 1 ステップ先の予測は非常に精度よく行われているものの、20 ステップ先の予測にはやや系統的な誤差を生じている。非観測時系列 y, z については、特に z 時系列に対し誤差がかなり大きくなっている。なお、100 ステップ先の予測誤差は図に示していないがかなり大きな誤差となった。

さらに、式 (11) の 30 個全てのパラメータの初期値が未知として、これらのパラメータの初期推定値として全てに一律 0.01 を与え、時系列 x, y, z の初期値も {20,

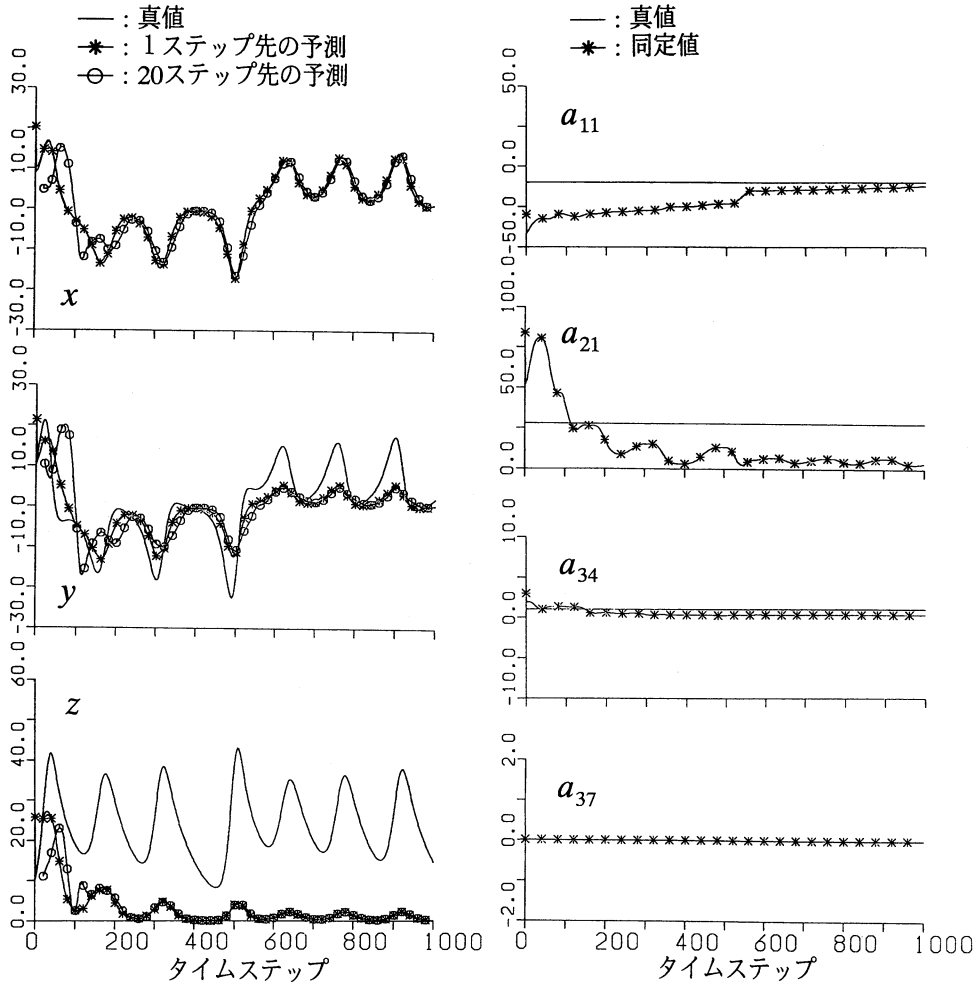


図-4 拡張カルマンフィルタによる時系列予測およびパラメータ同定
 (時系列の初期値 (20, 20, 20), Lorenz パラメータの初期値は真値の 300%, その他の
 パラメータの初期値は一律 0.01)

20, 20) から出発して計算を行った結果を図-5 に示す。本計算例では $P(0)$ の全成分を 10^{-4} 程度に設定しているため、図-5 のパラメータの同定結果は初期値からほとんど変化せず、かなり真値から外れて収束している。その結果、非観測時系列 y, z の予測には大きな誤差を生じている。また、観測時系列 x の 20 ステップ先の予測については系統的な誤差が見られるものの、1 ステップ先の予測は精度良く行なわれている。これはカルマンフィルタが、観測時系列の 1 ステップ先の予測誤差のみを評価基準としており、この情報のみをフィードバックしてパラメータの更新を行うため

であると考えられる。すなわち、全パラメータが真値に収束しなくとも、30 個のパラメータの適当な組合せにより、1 ステップ先の観測時系列を予測することが可能であるためと考えられる。

以上より、システムダイナミクスの構造が未知の場合の、拡張カルマンフィルタによる、カオス時系列のシステムパラメータの同定および時系列予測の可能性が示された。なお、予測問題に関しては、どの程度の時間スケールで、どの程度の精度で予測できれば、予測可能であるといえるのかという基準が曖昧であり、予測の目的に応じた基準を設定する必要がある。

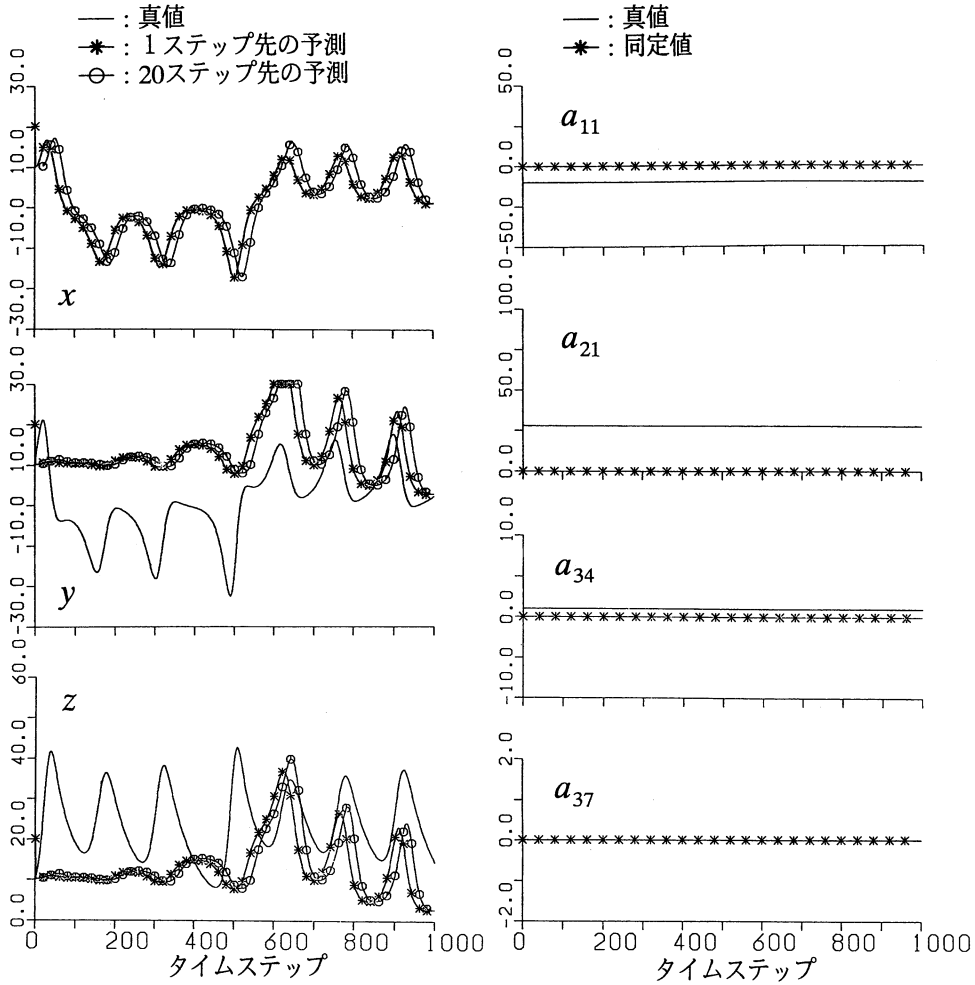


図-5 拡張カルマンフィルターによる時系列予測およびパラメータ同定
(時系列の初期値 (20,20,20), パラメータの初期値は一律 0.01)

4. む す び

本報では、別報¹⁾の非線形最小二乗法による、カオス時系列のシステムダイナミクスの推定と予測に関する研究の続きとして、Lorenz 方程式を対象に、オンライン予測手法としての拡張カルマンフィルターを、カオス時系列のシステムダイナミクスの構造が既知および未知の場合に対して適用した。そして、カオス時系列のパラメータ同定および時系列の予測を行い、本手法のカオス時系列への適用性および特性について検討を行った。その結果、非線形最小二乗法によるパラメータの同定は、初期パラメータを用いた時系列の数値計

算上、初期値の設定にかなり厳しい制約があるのに対し、拡張カルマンフィルターによるパラメータの同定および時系列の予測は、オンラインでパラメータを逐次修正していくため、非線形最小二乗法の場合に比べて、パラメータの初期値の制約は緩やかであることが示された。また、時系列の初期値についても、非線形最小二乗法と異なり、時系列の初期値を基準値に固定する必要がないので、適用範囲が広いことが示された。そして、パラメータの同定精度および時系列予測精度は、非線形最小二乗法に比べて格段に向上することが示された。特にシステムダイナミクスの構造が既知の場合は、拡張カルマンフィルターによるパラメータ同

定は速やかに精度良く行われるので、100 ステップ以上のかなり長期の時系列予測も精度良く行われることが明らかとなった。一方、システムダイナミクスの構造が未知の場合は、観測時系列の1ステップ先の予測については精度良く行われるものの、パラメータ同定および非観測時系列については、初期値が真値から外れるほど同定誤差および予測誤差が大きくなることがわかった。今後これらの同定精度を上げるためには、さらにカオス特性値などを観測方程式に組み込むなどの検討が必要であると考えられる。

参 考 文 献

- 1) 河村 明・松本 実・神野健二・許 士国：カオス時系列のダイナミクスの推定と予測(第一報) — Lorenz 方程式の初期値およびパラメータ依存性と非線形最小二乗法による予測について —, 九州大学工学集報, 第 67 巻, 第 5 号, pp. 513-521, 1994.
- 2) Lorenz, E. N.: Deterministic nonperiodic flow: J. Atmos. Sci., Vol. 20, pp. 130-141, 1963.
- 3) 上田年比古・河村 明・神野健二：適応的カルマンフィルターによる異常値検出について, 土木学会論文集, 第 345 号/II-1, pp. 111-121, 1984.
- 4) 河村 明・神野健二・上田年比古・土井敬介：上水道配水管網系の節点需要量のオンライン予測に関する研究, 土木学会論文集, 第 405 号/II-11, pp. 245-254, 1989.
- 5) Athans, M., Wishner, R.P. and Bertolini, A.: Suboptimal state estimation for continuous-time nonlinear systems from discrete noisy measurements, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-13, No. 5, pp. 504-514, 1968.
- 6) 松本 実・河村 明・神野健二・許 士国：カルマンフィルターによるカオス的な時系列の数学モデルの推定と予測について, 土木学会西部支部研究発表会講演概要集, pp. 314-315, 1993.
- 7) 星 清：洪水予測システムの基礎的検討(1), 土木試験所月報, No. 385, pp. 42-48, 1985.
- 8) Grassberger, P. and Procaccia, I.: Measuring the strangeness of strange attractors, Physica, 9D, pp. 189-208, 1983.
- 9) Nicolis, C.: Is there a climatic attractor?, Nature, Vol. 311, pp. 529-532, 1984.
- 10) 松本 実・河村 明・神野健二・許 士国：カオス時系列に対するシステム方程式の構築について, 第 48 回土木学会年次学術講演会講演概要集第 2 部, pp. 304-305, 1993.