

降雨時系列が周期関数で表される場合の 異常値検出について

上 田 年比古*・神 野 健 二*
河 村 明**・高 吉 晋 吾***

Detection of Abrupt Changes Occurring in a Rainfall Sequence Represented by a Periodic Function

Toshihiko UEDA, Kenji JINNO, Akira KAWAMURA
and Shingo TAKAYOSHI

By assuming that a rainfall sequence is represented by a periodic function, the adaptive Kalman filtering theory coupled with a generalized likelihood ratio test satisfactorily detects the presence of abrupt changes of a system occurring in the sequence and estimates their magnitudes and time of occurrence. Whereas the ordinary Kalman filter cannot be employed even in the detection of the abrupt changes, this adaptive Kalman filtering theory also accurately achieves the compensation of the forecast values. Simplification of this theory shortens CPU time and decreases the use of a large number of memory storages.

1. はじめに

自然現象や生体も含めたより広範なシステムの同定問題を考える場合、システムの特性格要素に異常値を含む場合を考慮する必要がしばしばある。例えば、年降水量の時系列にみられる少雨化傾向¹⁾などの気候変動は、降水システムの動特性に異常を生じ、システムが変化したとして数学的記述を行う方が、実系をより忠実に表現できると考えられる。このような事前に予測することが困難ないわゆる異常値、あるいは少なくとも状態を記述するシステムモデルでは表現できない系の変化に対しては、異常値が発生した時刻やその異常値の規模の早急な検出および推定を定量的に行い、対応策を立てることが望まれよう。

さて現在、線形推定理論の1つとしてカルマンフ

ィルターは、広範囲の分野で多くの問題に応用されている。水資源の分野においても、日野氏²⁾が水文流出予測にカルマンフィルターを適用して以来、さまざまな文献に見受けられるようになり一般的な手法になりつつある。しかし、定常な誤差統計値をもつ通常のカルマンフィルターのフィードバック機構では、先に述べたような異常値が存在する場合には、その異常値系列に追従することができず、将来予測に大きな誤差を生じることになる。これに対して近年、一般化尤度比検定法をカルマンフィルターと融合した形で用いて、システムに異常値が生じた場合の異常値発生時刻およびその異常値の規模を推定するいわゆる適応的フィルタリング法の研究が盛んになりつつある³⁾⁴⁾。Kitanidis and Bras⁵⁾は、河川の降雨流出をオンラインで予測する場合に、この適応的フィルタリング法を用いると予測精度の向上が得られると述べている。

ところで、周期関数による時系列の表示は既に多くの工学の分野でシステムの動特性として採用されていて、異常値の検出をスペクトルの変化として検出することが多い⁶⁾。また、山本義一編「気候変動」¹⁾や河村

昭和57年9月2日 受理

* 水工土木学教室

** 水工土木学専攻博士課程

*** 農林水産省

武編「気候変動の実態」⁷⁾のテキストにも見られるように、自然現象にはその時系列が周期関数で表される場合も少なくない。

本報では、周期関数で表される降雨時系列を対象に適応的フィルタリング法を適用し、その有効性を検討した。すなわち、福岡市の降雨時系列より卓越周期およびその振幅を求め、この周期および振幅をもつ降雨時系列に異常値が発生する場合を模擬発生させ、異常値の発生時刻およびその大きさを推定する。次に、システムパラメータをそれに応じて修正する適応的フィルタリング法による場合と通常のカルマンフィルタでパラメータ推定を行う場合との同定結果および予測精度を比較検討した。なお、計算機の記憶容量の軽減と演算時間の短縮のための簡易的な方法も示している。

2. 解析手法

2.1 通常のカルマンフィルタ⁸⁾

これは次の(1)式のようなダイナミクスで表されるシステムの状態量 \mathbf{x} を推定するのに適用される理論で、そのシステム状態量は(2)式の観測方程式を通してのみ観測される。

システム方程式：

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi(k)\mathbf{x}(k) + \Gamma(k)\mathbf{u}(k) \quad (1)$$

観測方程式：

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{H}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{w}(k) \quad (2)$$

ここに、

- k : 時点 ($k \geq 0$)
- $\mathbf{x}(k+1)$: システムの状態量ベクトル (n 次元)
- $\mathbf{y}(k)$: 観測量ベクトル (m 次元 ($m \leq n$))
- $\mathbf{u}(k)$: システム雑音。平均0で分散行列 $\mathbf{U}(k)$ の独立な正規性白色雑音 (p 次元ベクトル)
- $\mathbf{w}(k)$: 観測雑音。平均0で分散行列 $\mathbf{W}(k)$ の独立な正規性白色雑音 (m 次元ベクトル)
- $\Phi(k)$: 既知の状態遷移行列 ($n \times n$ 行列)
- $\Gamma(k)$: 既知の変換行列 ($n \times p$ 行列)
- $\mathbf{H}(k)$: 既知の観測行列 ($m \times n$ 行列)

システム状態量 \mathbf{x} の最適推定値は、 $\hat{\mathbf{x}}(0|0)$ 、 $\mathbf{P}(0|0)$ を初期値として与えると、以下の(3)~(12)式を順次計算することにより、各時点毎に逐次求めることができる。

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) = \Phi(k)\hat{\mathbf{x}}(k|k) \quad (3)$$

$$\hat{\mathbf{y}}(k+1|k) = \mathbf{H}(k+1)\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}(k+1|k) &\triangleq \mathbf{x}(k+1) - \hat{\mathbf{x}}(k+1|k) \\ &= \Phi(k)\tilde{\mathbf{x}}(k|k) + \Gamma(k)\mathbf{u}(k) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(k+1|k) &\triangleq E[\tilde{\mathbf{x}}(k+1|k)\tilde{\mathbf{x}}'(k+1|k)] \\ &= \Phi(k)\mathbf{P}(k|k)\Phi'(k) \\ &\quad + \Gamma(k)\mathbf{U}(k)\Gamma'(k) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \nu(k+1) &\triangleq \mathbf{y}(k+1) - \hat{\mathbf{y}}(k+1|k) \\ &= \mathbf{H}(k+1)\tilde{\mathbf{x}}(k+1|k) + \mathbf{w}(k+1) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(k+1) &\triangleq E[\nu(k+1)\nu'(k+1)] \\ &= \mathbf{H}(k+1)\mathbf{P}(k+1|k)\mathbf{H}'(k+1) + \mathbf{W}(k+1) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\mathbf{K}(k+1) = \mathbf{P}(k+1|k)\mathbf{H}'(k+1)\mathbf{V}^{-1}(k+1) \quad (9)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k+1) = \hat{\mathbf{x}}(k+1|k) + \mathbf{K}(k+1)\nu(k+1) \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}(k+1|k+1) &\triangleq \mathbf{x}(k+1) - \hat{\mathbf{x}}(k+1|k+1) \\ &= \tilde{\mathbf{x}}(k+1|k) - \mathbf{K}(k+1)\nu(k+1) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(k+1|k+1) &\triangleq E[\tilde{\mathbf{x}}(k+1|k+1)\tilde{\mathbf{x}}'(k+1|k+1)] \\ &= [\mathbf{I} - \mathbf{K}(k+1)\mathbf{H}(k+1)]\mathbf{P}(k+1|k) \end{aligned} \quad (12)$$

ここに、

$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k)$: k 時点までの観測情報による $\mathbf{x}(k+1)$ の最適推定値

$\hat{\mathbf{y}}(k+1|k)$: k 時点までの観測情報による $\mathbf{y}(k+1)$ の最適推定値

$\mathbf{K}(k+1)$: カルマンゲインマトリックス ($n \times m$ 行列)

$\nu(k+1)$: 1時点先の観測量の予測残差(イノベーションと呼ばれる)

' : 転置記号, \triangleq : 定義, $E[\]$: 期待値演算

\mathbf{I} : 単位行列 ($n \times n$ 行列)

2.2 適応的フィルタリング法³⁾⁴⁾⁵⁾

この手法は次式のようなダイナミクスで表されるシステムの状態量を推定するのに適応される手法である。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \Phi(k)\mathbf{x}(k) + \Gamma(k)\mathbf{u}(k) \\ &\quad + \mathbf{G}(k)\delta_{k\theta}\delta v(k) \end{aligned} \quad (13)$$

ここに、

$\mathbf{G}(k)\delta_{k\theta}\delta v(k)$: 未知の独立した異常値項

$\mathbf{G}(k)$: 既知の重みベクトル (n 次元)

θ : 実際に異常値の発生した時点

$\delta v(k)$: k 時点における未知の異常値量
 (スカラー)
 $\delta_{k\theta}$: クロネッカーのデルタ

(13)式は通常のカルマンフィルターのシステム方程式に異常値項 $G(k)\delta_{k\theta}\delta v(k)$ を含んだ形となっている。観測方程式は通常のカルマンフィルターの観測方程式(2)式と同じである。この手法は、一般化尤度比検定法により異常値の有無を検定し、もし異常値が検出されればその発生時点およびその大きさを推定し、異常値の大きさに応じて状態量を修正するものである。以下に異常値検出から修正までの諸式を示すが、実際の降雨量などの時系列の観測量はスカラーであるので、ここでは(2)式の観測量 $y(k)$ はスカラーとする。なお $y(k)$ がベクトルの場合も同様に誘導できる。

(13)式は2つの仮説に分けることができる。

仮説 H_0 : 異常値 $\delta v(k)$ が発生していない。

仮説 H_1 : $k=\theta$ において異常値 $\delta v(k)$ が発生している。

仮説 H_0 の下では通常のカルマンフィルターによりシステム状態量を推定する。一方仮説 H_1 の場合は、イノベーション系列の尤度比をとることにより、異常値 $\delta v(\theta)$ の最尤推定値 $\delta\hat{v}(\theta)$ が次のように求められる。

$$\delta\hat{v}(\theta) = \phi(\theta, l) / \mu(\theta, l) \tag{14}$$

ここに、

$$\phi(\theta, l) \triangleq \sum_{i=1}^l \frac{v(\theta+i)A(\theta, \theta+i)}{\sigma^2(\theta+i)} \quad (\text{スカラー}) \tag{15}$$

$$\mu(\theta, l) \triangleq \sum_{i=1}^l \frac{A^2(\theta, \theta+i)}{\sigma^2(\theta+i)} \quad (\text{スカラー}) \tag{16}$$

$$A(\theta, \theta+i) \triangleq H(\theta+i)\Psi(\theta, \theta+i)G(\theta) \tag{17}$$

$$\Psi(\theta, \theta+i) \triangleq \begin{cases} \Phi(\theta+i-1)[I-K(\theta+i-1)] \\ \quad \times H(\theta+i-1)\Psi(\theta, \theta+i-1) & (\text{if } i \geq 2) \\ I & (\text{if } i = 1) \\ 0 & (\text{if } i \leq 0) \end{cases} \quad (n \times n \text{ 行列}) \tag{18}$$

$$\sigma^2(\theta+i) = H(\theta+i)P(\theta+i|\theta+i-1) \times H'(\theta+i) + W(\theta+i) \tag{19}$$

この $\delta\hat{v}(\theta)$ なる大きさの異常値が発生したことを真とした場合の尤度比は一般化尤度比 $A_g(\theta, l)$ の定義さ

れ、

$$A_g(\theta, l) = \exp[\phi^2(\theta, l) / 2\mu(\theta, l)] \tag{20}$$

となる。この一般化尤度比の大きさにより仮説 H_0 , H_1 のいずれを受容するかを決定するのが一般化尤度比検定である。これは次の(21)式で定義される $\phi_*(\theta, l)$ を考えると、(22)式により異常値発生の有無を検定することと等価である。以後 $\phi_*(\theta, l)$ を異常検出指標と呼ぶことにする。

$$\phi_*(\theta, l) \triangleq \sqrt{2 \ln A_g(\theta, l)} \\ = |\phi(\theta, l)| / \sqrt{\mu(\theta, l)} \tag{21}$$

$$\phi_*(\theta, l) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \eta \tag{22}$$

ここに、 η : 閾値

さらに異常値発生時点 θ の最尤推定値 $\hat{\theta}$ を求めるには、(20)式の一般化尤度比を最大にする時点 k を求め、これを $\hat{\theta}$ とすることにより求められる。

$$\hat{\theta} = \max_k A_g(k, l) = \max_k \phi_*(k, l) \tag{23}$$

ここで(23)式により実際に $\hat{\theta}$ を求めるには、各時点毎に変化する非定常異常検出指標 $\phi_*(k, l)$ を現時点以前のすべての時点について計算する必要がある。これは、時点が進行すると共に新しいイノベーションが次々と入力されるので、イノベーション蓄積個数 l も次々と大きくなり、そのためある時点 k_1 における異常検出指標 $\phi_*(k_1, l)$ の値も刻々変化するからである。この計算の実行は時点の進行と共に記憶容量および演算時間を増大させるので、通常は有限なデータ幅 N を考え、現時点より N 時点以内の異常検出指標のみを計算することになる。そこで本報では、異常検出指標を計算するときに入力される情報量が若干小さくなるが、 l をパラメーターとして与えある値に固定することにより、異常検出指標の値を時点の進行と共に変化させず定常値として計算する。こうすれば、現時点までの情報量より得られる最新の異常検出指標 $\phi_*(k_{new}, l)$ とそれ以前の時点で既に計算されている異常検出指標の最大値 $\phi_*(k_{old}, l)$ との2つの値の大小関係のみを比較すればよく、データ幅を考慮する必要もないので、記憶容量の軽減および演算時間の短縮になり実用的である。 l を固定することは、(14), (20)式の統計的性質が l の増減に関係しないことから許容される。

以上の一般化尤度比検定法により異常値が検出されると、これに対してフィルターを適応させるために、状態推定量を次の(24)式のように修正し、また $\delta v(\theta)$

の推定の不正確さを補うために、推定誤差共分散行列を(25)式のように修正する。新しく修正されたものに添字 *new* を付ける。

$$\hat{x}_{new}(\theta+i|\theta+i) = \hat{x}_{old}(\theta+i|\theta+i) + \mathbf{A}(\theta, \theta+i) \delta \hat{v}(\theta) \quad (24)$$

$$P_{new}(\theta+i|\theta+i) = P_0(\theta+i|\theta+i) + \Phi^*(\theta, \theta+i) G(\theta) G'(\theta) \Phi^{*'}(\theta, \theta+i) / \mu(\theta, l) \quad (25)$$

ここに、

$$\mathbf{A}(\theta, \theta+i) \triangleq [I - \mathbf{K}(\theta+i) \mathbf{H}(\theta+i)] \times \Psi(\theta, \theta+i) G(\theta) \quad (26)$$

$$\Phi^*(\theta, \theta+i) \triangleq \Phi(\theta+i-1) \cdot \Phi(\theta+i-2) \cdot \dots \cdot \Phi(\theta+1) \quad (27)$$

$\hat{x}_{old}(\theta+i|\theta+i)$: 通常のカルマンフィルタによる $(\theta+i)$ 時点における状態量の最適推定値

$P_0(\theta+i|\theta+i)$: システムに異常がないとする通常のカルマンフィルタの計算ループにより求められている推定誤差共分散行列

3. 福岡市降雨時系列の卓越周期とその振幅

福岡市の明治23年(1890年)から昭和53年(1978年)までの89年間32506日間の日降雨記録(mm/day)から年降雨量(mm/年)および旬平均降雨量を計算した。年降雨量時系列を 図-1 に示す。次いで89個の年降雨量

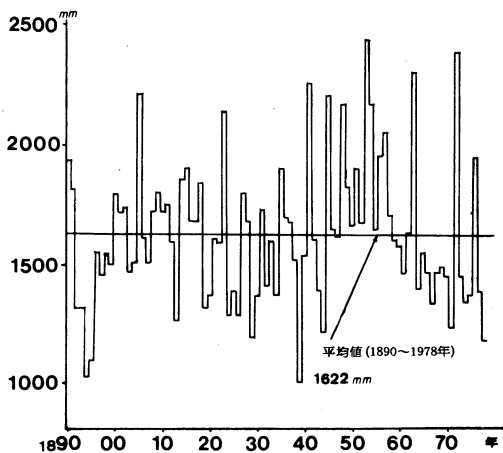


図-1 福岡市年降雨量時系列

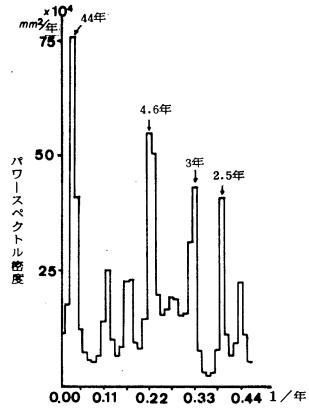


図-2 福岡市年降雨量のMEMによるスペクトル

および3024個の旬平均降雨量に、短いデータからでも精度のよいスペクトル解析が可能なMEM(最大エントロピー法)⁹⁾を用いてスペクトル解析を行った。この結果年降雨量の場合は 図-2 に示すように数本のピークが表れた。このうちパワースペクトルの大きい方から4番目までのピークは、44年、4.6年、3年、2.5年の周期をもつ波である。また旬平均降雨量の場合は 図-3 に示すように4つの卓越したピークが表れた。これらは、36旬、9旬、7.2旬、6旬の周期をもつ波である。

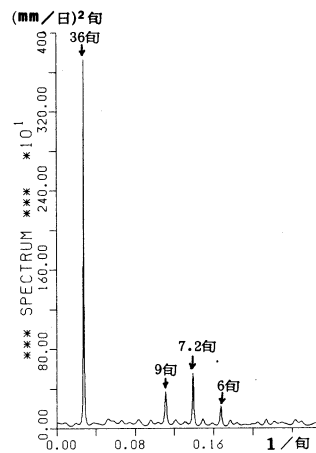


図-3 福岡市旬平均降雨量のMEMによるスペクトル

ここでは降雨時系列が次の(28)式のように、平均値、周期成分およびランダム成分の和であるような周期関

数で表されると考える。

$$y(k) = M_y + \sum_{i=1}^m (A_i \sin 2\pi f_i k + B_i \cos 2\pi f_i k) + w(k) \quad (28)$$

ここに、

- $y(k)$: k 時点の時系列の値
- M_y : 時系列の平均値
- m : 周波数成分の個数
- f_i : 周波数成分
- A_i, B_i : f_i に対する振幅
- k : 時点
- $w(k)$: 平均0の正規性白色雑音

なお、この時系列のモデルの採用にあたってはSenの研究¹⁰を参考にした。(28)式を旬平均降雨量時系列に適用し、周波数成分の個数 $m=4$ 、4つの卓越周波数 $[f_1, f_2, f_3, f_4]=[1/36, 1/9, 1/7.2, 1/6]$ (1/旬) を与えて最小2乗法により旬平均降雨量の平均値および各周波数成分に対する振幅を求めた結果を表-1に示す。

表-1 福岡市旬平均降雨量の平均値および振幅

M_y	A_1	B_1	A_2	B_2	A_3	B_3	A_4	B_4
4.5	-0.7	-2.5	0.0	1.2	-0.6	-1.1	0.6	0.6

4. 計算例

旬平均降雨時系列を想定し、(28)式より異常値を含む時系列を模擬発生させた。すなわち、3.で求めた旬平均降雨時系列の4つの卓越周波数をもち、表-1に示された平均値および振幅をもつ時系列において、72時点で異常が発生したとして73時点以降の平均値および振幅を表-2のように変化させて、(28)式より時系列を180ステップ程模擬発生させた。ここで、ケース1では(28)式の正規性白色雑音 $w(k)$ が存在しない場合を考え、ケース2では $w(k)$ として平均0分散0.5の正規乱数を与えた。これは最大振幅の約1/10の標準偏差をもつ正規性白色雑音に相当する。また、適応的フィルタリング法における(13)式の既知の重みベクトル $G(k)$ を、表-1と表-2の差として $G(k)=[0.5 \ 0.7 \ -0.5 \ -1.2 \ 1.2 \ -0.3 \ 0.0 \ 0.3 \ 0.5]$ と考えると、異常値発生時点 $\theta=72$ で $\delta v(\theta)=-1.0$ なる大きさの異常値を模擬発生させたことになり、本手法でこれらが検出で

表-2 模擬発生に用いた異常値発生後の平均値および振幅

M_y	A_1	B_1	A_2	B_2	A_3	B_3	A_4	B_4
4.0	0.0	-2.0	1.2	0.0	-0.3	-1.1	0.3	0.1

きることを期待したものである。

以上により、(28)式において周波数 f は既知として平均値 M_y および振幅 A_i, B_i を同定し、カルマンフィルタにより時系列 $y(k)$ の将来予測を行う場合を考えると、これは(1)、(2)、(3)式のシステム方程式および観測方程式の各諸量において、 $x(k)=[M_y \ A_1 \ B_1 \ \dots \ A_4 \ B_4]^T$ 、 $\Phi(k)=I$ 、 $H(k)=[1 \ \sin 2\pi f_1 k \ \cos 2\pi f_1 k \ \dots \ \sin 2\pi f_4 k \ \cos 2\pi f_4 k]$ とする場合に相当する。ここで、システム雑音の分散 $U=O$ 、観測雑音の分散 $W=0.25$ としてケース1、2の模擬異常時系列に対して、通常のカルマンフィルタおよび適応的フィルタリング法で1ステップ先を予測した値を図-4,5の(a)、(b)に示し、これらの1ステップ先の予測残差(イノベーション)を図-4,5の(c)、(d)に示す。また、(21)式の異常検出指標 $\phi_*(k, l)$ の値を図-4,5の(e)に示す。なおカルマンフィルタの初期値として、 $\hat{x}(0|0)$ は表-1の値を、 $P(0|0)$ は対角成分を5.0それ以外の成分は1.0を与えた。適応的フィルタリング法におけるイノベーション蓄積個数 $l=1$ 、閾値 $\eta=3$ としている。

5. 考察

図-4,5の(a)、(c)に示すように、通常のカルマンフィルタでは異常値系列に徐々にしか追従できず大きな予測残差を生ずる。これに対して適応的フィルタリング法では、ケース1の場合 $\hat{\theta}=74$ 、 $\delta\hat{v}(\hat{\theta})=-0.96$ 、ケース2の場合 $\hat{\theta}=73$ 、 $\delta\hat{v}(\hat{\theta})=-1.3$ と異常値を検出して状態量を修正したので、図-4,5の(b)、(d)に示すように異常値系列によく追従しており、1ステップ先の予測残差もかなり小さくなっている。この場合、ケース1の雑音のない時系列の場合でも異常値発生時点の推定が2時点程ずれているが、これらの計算例では異常値が発生してもすぐにはイノベーションが大きくなるような異常値であったため、異常検出指標のピークが実際の異常値発生時点よりも少し遅れて現れたためであり、またこの場合の検定では、イノベーション蓄積個数 l を最小の1として検定を行っているため、異常値の検出および推定の精度が低いのである。例えば、ケース1で $l=5$ とした場合 $\hat{\theta}=73$ 、 $\delta\hat{v}(\hat{\theta})=-1.00$ 、ケース2で $l=5$ とした場合 $\hat{\theta}=72$ 、 $\delta\hat{v}(\hat{\theta})=-1.14$ となり、一般に l を大きくすると異常値の発生時点および大きさの推定精度は向上する。しかし異常値検出時点はそれだけ遅れる。

時系列に加わる雑音の影響については図-4,5の(e)より、雑音が大きくなる程、異常値発生の影響による

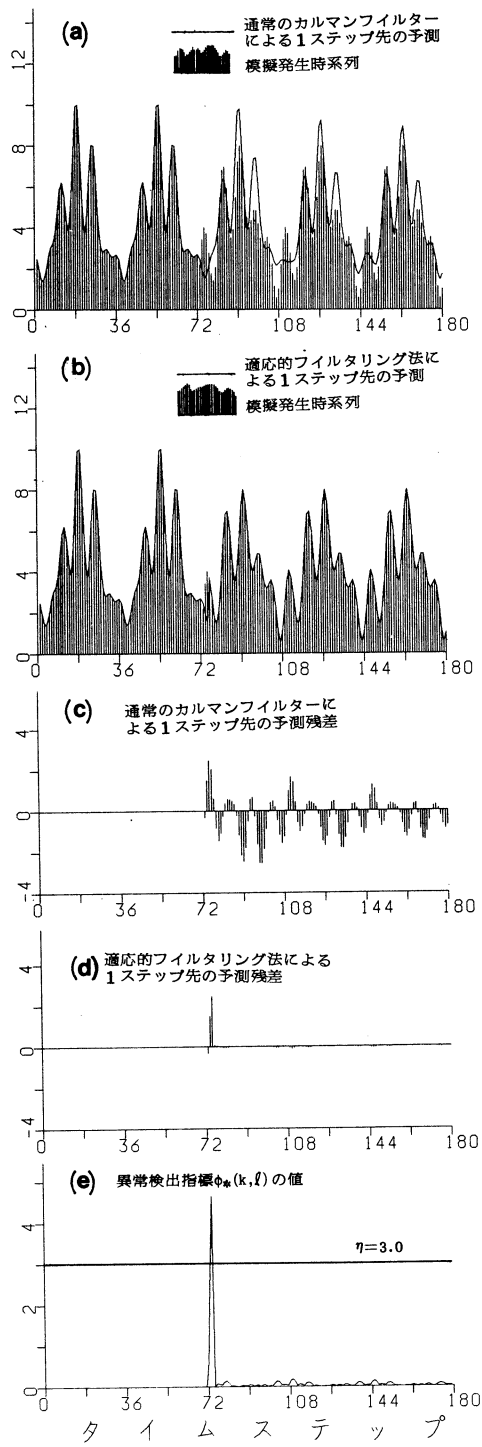


図-4 ケース1の結果

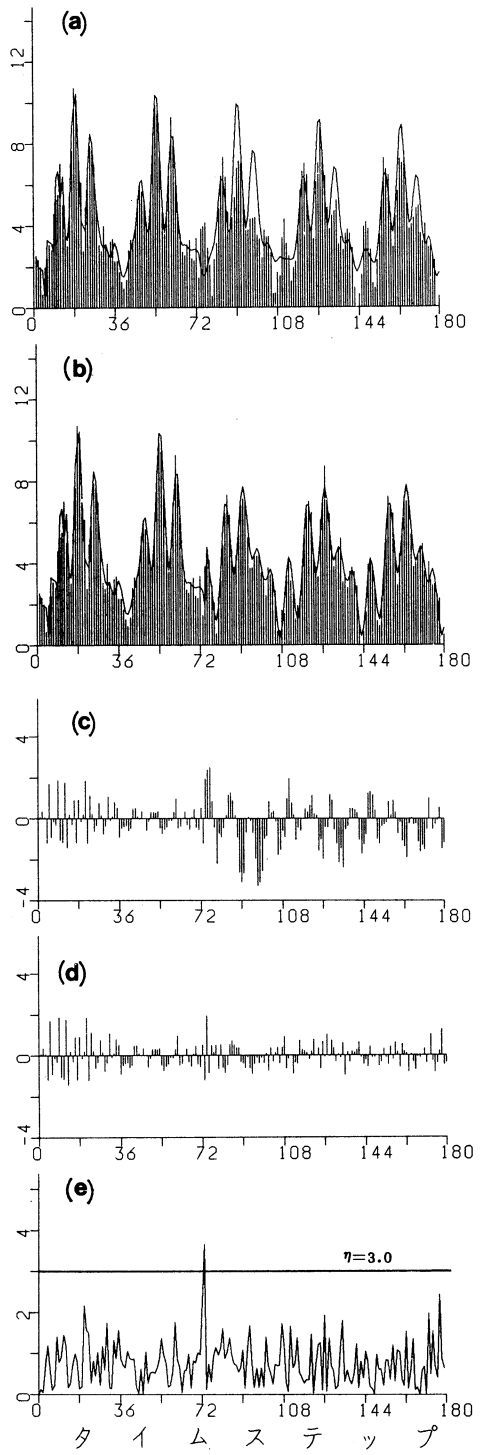


図-5 ケース2の結果

異常検出指標のピークと雑音の影響による異常検出指標の値との差が縮まり、異常値の発生を検出するのが難しくなる。また検出できてもその異常値の推定精度は低いものとなる。雑音が余りに大きい場合には、異常値発生による異常検出指標のピークは完全に雑音の影響による異常検出指標の値の中に埋れてしまい、異常値を検出することが不可能となる。この場合でも l を大きくすると、異常値発生による異常検出指標のピークが高くなり、相対的に雑音の影響が小さくなるので検出精度は向上する。

この(13)式のダイナミクスを想定した適応的フィルタリング法は、異常値がシステム状態量の各要素に及ぼす比率が何らかの方法で推定されなければならないが、それが可能な場合には l を最小の1に設定しても異常値系列によく適合し、速やかに異常値を同定することが可能である。よって本手法はシステムに予期し得ない突発的異常値が発生した場合の速やかな同定および時系列の予測に有効な手法であると考えられる。

謝辞：本研究において本学電気工学科の橋本修輔博士に有益な御助言を頂いたのでここに深謝申し上げます。

参考文献

- 1) 山本義一編：気候変動，東京大学出版会，pp. 32-42, 1979年。
- 2) 日野幹雄：水文学流出系予測へのカルマン・フィルタ理論の適用，土木学会論文報告集，第221号，pp. 39-47, 1974年1月。
- 3) Willsky, A. S., and Jones, H. L. : A Generalized Likelihood Ratio Approach to the Detection and Estimation of Jumps in Linear Systems, IEEE Trans. on A.C., pp. 108-112, February, 1976.
- 4) Kitanidis, P. K., and Bras, R. L. : Adaptive Filtering Through Detection of Isolated Transient Errors to Rainfall-Runoff Models, W. R. R., Vol. 16, No. 4, pp. 740-748, August, 1980.
- 5) 熊丸・鬼木，岐部：複号ダイナミックパターン変化を伴う線形系の識別同定，九大工学集報，第50巻，第5号，pp. 571-576, 1977年10月。
- 6) 計測自動制御学会編：異状検出予測シンポジウム報告集，1978年11月。
- 7) 河村 武編：気候変動の実態，古今書院，1980年。
- 8) 有本 卓：カルマン・フィルタ，産業図書，1977年。
- 9) 日野幹雄：スペクトル解析，朝倉書店，pp. 219-227, 1977年。
- 10) Sen, Z. : Adaptive Fourier Analysis of Periodic-Stochastic Hydrologic Sequences, Journal of Hydrology, No. 46, pp. 239-249, 1980.