

損失機構を組み合わせた貯留関数法を用いたカルマンフィルターによる実時間流出解析

九州大学工学部 学生員 森 永 陽 子
 九州大学大学院工学研究院 正会員 河 村 明
 九州大学大学院工学研究院 正会員 神 野 健 二

1. はじめに

洪水時の災害の防止, 軽減のためには河川への的確な流出予測が必要不可欠である. 洪水流出解析では降雨から流出量を算定するために, 単位図法, タンクモデル, 貯留関数法等様々な流出予測モデルが提案され用いられている. このうち貯留関数法は降雨流出現象の非線形性を簡単な構造式で表現でき, 比較的計算が簡便なことから洪水流出解析に多用されている. しかし, 従来の貯留関数法では有効雨量を用いることによる誤差, また, 直接流出量の算定, すなわち基底流出量分離手法の違いにより解析結果が大きく異なるという問題が指摘されていた¹⁾. 馬場ら¹⁾はこれらの問題を克服するために, 貯留関数法に損失機構組み込み, 入力と出力に観測雨量と総流出量を直接用いる方法を提案し, 検討を行っている¹⁾. 本研究では, この損失機構を組み合わせた二価の貯留関数法を用いたカルマンフィルターによる流出の実時間予測問題を考える. すなわち, まず, 損失機構を組み合わせた二価の貯留関数法に対するカルマンフィルターの定式化を行う. 次に筑後川の江川ダムへの流入量に本手法を適用し実時間予測を行うことにより, 本手法の予測精度および特性について検討を行う.

2. 損失機構を組み合わせた二価の貯留関数法

損失項を導入した貯留関数法では, 観測雨量 $r(\text{mm/h})$ に対する貯留高 $s(\text{mm})$ と総流出高 $q(\text{mm/h})$ の関係を式(1)で, また, 貯留高 s の連続の式を(2)で表す. そして式(2)の損失項 $p(\text{mm/h})$ としては, 馬場ら¹⁾の研究により良好な結果が得られている式(3)を用いる. すなわち損失は総流出高に比例する.

$$s(t) = k_1 q^{p_1}(t) + k_2 \frac{d}{dt} q^{p_2}(t) \dots \dots (1) \quad \frac{ds(t)}{dt} = r(t) - q(t) - p \dots \dots (2) \quad p = a q(t) \dots \dots (3)$$

ここに, t : 時間(h), k_1, k_2, p_1, p_2, a : モデルパラメーター.

式(2), (3)を式(1)に代入すると式(4)の非線形2階常微分方程式となる.

$$k_2 \frac{d^2 q^{p_2}(t)}{dt^2} - k_1 p_1 q^{p_1-1}(t) \frac{dq(t)}{dt} - r(t) - (1-a)q(t) \dots \dots (4)$$

ここで, 式(4)の2階の常微分方程式を $x_1(t) = q(t)^{p_2}, x_2(t) = dq(t)^{p_2}/dt \dots \dots (5)$ として変数変換を行うと, 式(6)の1階の2元連立常微分方程式に変換される.

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t), \quad \frac{dx_2(t)}{dt} = \frac{k_1 p_1}{k_2 p_2} x_1(t)^{\frac{p_1}{p_2}-1} x_2(t) - \frac{(1-a)}{k_2} x_1(t)^{\frac{1}{p_2}} \frac{r(t)}{k_2} \dots \dots (6)$$

この場合, モデルパラメーター k_1, k_2, p_1, p_2, a および降雨 $r(t)$ が既知であれば数値解析法により式(6)を解き, 各時点での流出が計算されることとなる.

3. カルマンフィルターによる定式化

損失機構を組み合わせた二価の貯留関数法を用いたカルマンフィルターによる洪水流出の実時間予測では, 推定すべき状態量 x として式(5)の x_1, x_2 以外に未知パラメータである k_1, k_2, p_1, p_2 および a を状態量とする. すなわち $x_3 = k_1, x_4 = 1/k_2, x_5 = p_1, x_6 = 1/p_2, x_7 = a$ とおき, これらをまとめてベクトル $X = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7]^T$ (T : 行列の転置を表す)とおくと式(6)の微分方程式は式(7)のように拡張される.

$$dX(t)/dt = [f_1(t) \dots \dots f_7(t)]^T \cdot F(X) \dots \dots (7)$$

$$\text{ただし, } f_1(X) = x_2(t), \quad f_2(X) = x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_1^{x_3 x_6 - 1} - x_4 (x_7 - 1) x_1^{x_6} \cdot x_4 r(t), \quad f_3(X) = \dots \dots f_7(X) = 0 \dots \dots (8)$$

ここで, 計算が容易でカルマンフィルターの適用に便利なようにベクトル関数 $F(X)$ を予め既知な $X = X^*$ を中心とするTaylor展開を行い, 二次項以下を無視して線形化方程式に変換すると次式となる.

$$dX/dt = J(X^*)X + B(X^*) \dots \dots (9)$$

ここに、行列 $J(X^*) : F(X)$ のヤコビアン、行列 $B(X^*) : B(X^*) - F(X^*)X^* \dots \dots \dots$ (10) さらに、式(9)を式(11)の差分方程式に変換したものがカルマンフィルターのシステム方程式に対応する。

$$X(k+1) = \Psi(k)X(k) + \Lambda(k)B(k) \dots \dots \dots (11)$$

ここに、 k は離散化された計算時点であり、行列 $\Psi(k)$ 、 $\Lambda(k)$ は t を時間間隔とすると式(12)、式(13)で計算される。

$$\Psi(k) = \exp(J\Delta t) = I + J\Delta t + (J\Delta t)^2/2! + (J\Delta t)^3/3! + (J\Delta t)^4/4! + \dots \dots \dots (12)$$

$$\Lambda(k) = [\exp(J\Delta t) - I]J^{-1} = \Delta t [I + (J\Delta t)/2 + (J\Delta t)^2/3! + (J\Delta t)^3/4! + \dots \dots \dots] \dots \dots \dots (13)$$

次にカルマンフィルターの観測方程式における観測量 $y(k)$ は総流出高 $q(k)$ に対応し、 $y(k) = q(k) = x_1^{1/p_2} \cdot x_1^{x_6} \dots \dots \dots$ (14)

で表される。途中の詳細な誘導は省略するが最終的に次式となる。 $y(k) = C(X^*)X + D(X^*) \dots \dots \dots$ (15)

ただし、 $C(X^*) = [x_6 x_1^{x_6-1} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ x_1^{x_6} \ln x_1 \ 0]_{X \cdot X}$ 、 $D(X^*) = [x_1^{x_6} (1 - x_6 x_6 \ln x_1)]_{X \cdot X}$ である。以上によりカルマンフィルターの観測方程式が定式化される²⁾。

4. 適用例

ここでは適用例として筑後川江川ダム流域における平成5年6月28日10時～7月1日9時までの1時間毎の降雨、流量データに対し、本手法を適用し検討する。まず、推定すべき状態量 $X(k)$ の初期推定値を考える。パラメータ p_1 、 p_2 の初期値については、表面流にマニング側を想定した場合に得られる $p_1=0.6$ 、 $p_2=0.465$ を用いる。パラメータ k_1 、 k_2 については、 $k_1 = 11.62A^{0.24}$ 、 $k_2 = 0.0593k_1^2$ (A : 断面積)なる関係が得られている¹⁾ので、本流域面積 $A = 30km^2$ を用いておおよそ計算すると $k_1=26$ 、 $k_2=41$ が得られることよりこれを初期推定値とする。同じく、パラメータ a については、 $1/(1+a) = Q/R$ (Q : 総流出量、 R : 総降雨量)なる関係が得られているので、本適用例の $Q=70.0$ (mm/h)、 $R=127.5$ (mm/h)を用いて計算すると $a=0.82$ となる。よって初期値としては $a=0.8$ を用いる。さらに、 x_1 、 x_2 の初期値は式(5)より初期流量を考慮し $x_1=0.76$ 、 $x_2=0$ とした。以上の初期値のもとでカルマンフィルターにより実時間予測を行った結果を図-1に示す。また、参考のため、二価関数の貯留関数パラメータ k_1 、 k_2 、 p_1 、 p_2 および a を初期値推定値の値に固定した場合の計算結果も図-1に併記する。図-1よりパラメータを初期推定値に固定した場合は、最初のピークを0.5(mm/h)程過小評価し、また、時間

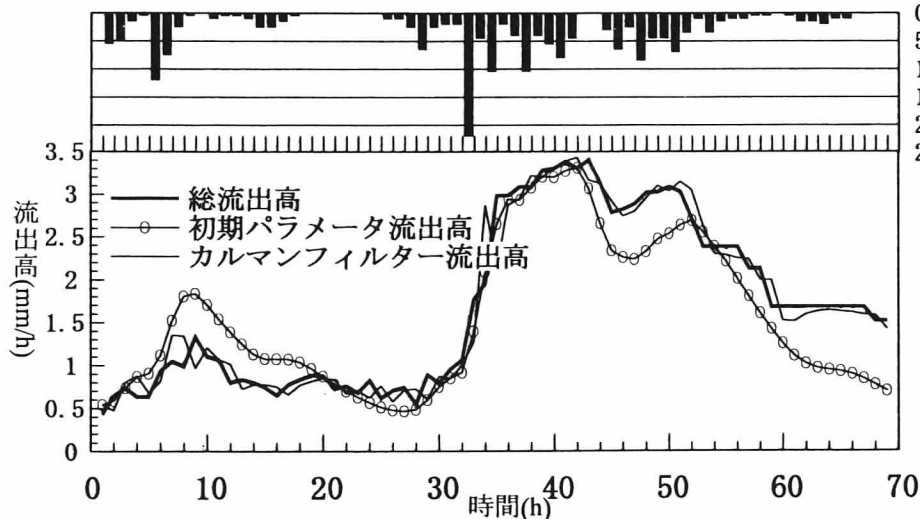


図-1 時間雨量および時間流出高計算結果

40(h)以降ではかなり過小評価しており、全期間の平均二乗誤差(RMSE)は0.48(mm/h)となっている。一方、カルマンフィルターによる実時間予測では全体的に流量を精度よく予測しているのがわかる。RMSEも0.22 (mm/h)と、パラメータを固定した場合に比べ、かなり小さな値となっている。

5. むすび

本報では、損失機構を組み合わせた貯留関数法を用いたカルマンフィルターによる実時間流出解析を行った結果、カルマンフィルターにより洪水流出の実時間予測が精度よく行われることが示された。

【参考文献】

- 1) 馬場仁志・星清・橋本謙秀: 損失機構を組み合わせた貯留関数モデルの総合化, 水工学論文集, 第43巻, pp1085-1090, 1999.
- 2) 河村明: 貯留関数法を用いたカルマンフィルターによる洪水流出の実時間予測, 水理公式集例題プログラム集CD-ROM版, 土木学会, pp1.12.1-1.12.26, 2001.