

非線形最小二乗法によるカオス方程式のパラメータ推定特性について

九州大学大学院 学生員 ○松本 実  
 九州大学工学部 正員 河村 明  
 九州大学工学部 正員 神野 健二  
 九州大学工学部 正員 許 士国  
 Lund Univ. R. BERNDTSSON

1. はじめに

多くの水文時系列は非線形のカオスの特徴を有している。この場合、従来確率過程的に取り扱われていた時系列を、カオス論的な取扱いによりある程度物理的に解釈し、時系列の数学モデルの推定および精度良い予測を行うことが可能であると考えられる。著者らはこれまでに、カオスを引き起こす微分方程式としてLorenz方程式を対象とし、まず本非線形微分方程式のパラメータは未知であるが、方程式の構造は既知であるとして、拡張カルマンフィルター(EKF)により、カオス時系列の数学モデルのパラメータ同定および時系列の予測を行ない、精度良い結果を得た<sup>1)</sup>。しかし、実際の水文時系列においては、その時系列を生み出すシステム方程式の構造は未知と考えられるので、次に一般的な数学モデルを仮定して、その関数の各項の係数を未知パラメータとして、EKFにより逐次同定しながら時系列の予測を行う手法を、Lorenz方程式の変数xのみを観測時系列とする場合に適用した。結果として、観測時系列の予測は精度良く行なわれたものの、その他の非観測時系列やパラメータに関しては、あまり精度良い結果は得られなかった<sup>2)</sup>。その理由の1つとして、カオス的な数学モデルは、初期値やパラメータの値に対して非常に敏感であることが挙げられ、EKFの適用に際しても、その初期推定値の設定が重要な問題となっていることが考えられる。そこで本報では、より真値に近い初期値推定値を得るために、非線形最小二乗法を用いてパラメータの推定を試みる。すなわち、一般的なカオス時系列の数学モデルを仮定し、その関数の各項の係数を未知パラメータとして、非線形最小二乗法をLorenz方程式の変数xのみを観測時系列とする場合に適用し、本手法のカオス時系列への適用性及び特性についての検討を行なう。

2. 一般的な非線形微分方程式に対する最小二乗法の適用

Lorenz方程式は式(1)で示される3元連立常微分方程式である。

$$\dot{x} = \sigma(y-x) \quad , \quad \dot{y} = Rx - y - xz \quad , \quad \dot{z} = xy - bz \tag{1}$$

ここに、 $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ は $x, y, z$ の時間 $t$ に関する微分、 $\sigma, R, b$ はパラメータであり、系の挙動に非常に敏感に作用する。カオスの現象の例としてよく用いられるのは、 $\sigma=10, R=28, b=8/3$ である。ここで、時間間隔 $\Delta t=0.005$ とし、 $t=t_0=0$ における $x, y, z$ の初期値 $(x(0), y(0), z(0))=(10, 10, 10)$ として、ルンゲ・クッタ・ギル法(RKG法)により式(1)を数値計算で解いた結果の時系列をLorenz方程式の真値とする。そして、ここでは時系列xのみが観測できるとする。

時系列を支配するシステム方程式の次元(独立変数の数)は、時系列のフラクタル次元を計算することにより決定することができる<sup>3)</sup>。ここではシステム方程式の数が3の場合を例にとり定式化を行なう。3つの変数を $x, y, z$ とし、それらのシステム方程式が一階の連立常微分方程式で表されると仮定し、一般的な非線形微分方程式の関数 $f_i(x, y, z)$ をTaylor展開し、2次の項までとると次式となる。

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y, z) = a_{11} + a_{12}x + a_{13}y + a_{14}z + a_{15}xy + a_{16}yz + a_{17}zx + a_{18}x^2 + a_{19}y^2 + a_{110}z^2 \\ \dot{y} = f_2(x, y, z) = a_{21} + a_{22}x + a_{23}y + a_{24}z + a_{25}xy + a_{26}yz + a_{27}zx + a_{28}x^2 + a_{29}y^2 + a_{210}z^2 \\ \dot{z} = f_3(x, y, z) = a_{31} + a_{32}x + a_{33}y + a_{34}z + a_{35}xy + a_{36}yz + a_{37}zx + a_{38}x^2 + a_{39}y^2 + a_{310}z^2 \end{cases} \tag{2}$$

ここに、 $a_{ij}(i=1\sim 3, j=1\sim 10)$ はパラメータである。

本報での最小二乗問題を簡単に要約すると以下ようになる。まず30個の未知パラメータ $a = \{a_{ij}\}$ の初期値を適当に設定し、式(2)をRKG法により $m$ ステップまで解く。ここで、得られた変数xの時系列 $\hat{x}_m = \{\hat{x}_1(a), \hat{x}_2(a), \dots, \hat{x}_m(a)\}$

と、時系列の真値  $x_m = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  を比較し、これらの残差二乗和  $S(a) = \sum_i \{x_i - \hat{x}_i(a)\}^2$  が最小になるように、 $a$ を求めてゆき、これを最適推定値  $a^*$ とする。ここでは非線形最小二乗法の中で比較的簡単で精度の良い改訂マルカート法(LMM法)<sup>4)</sup>を用いた。

### 3. 最小二乗法の適用結果と考察

式(2)におけるパラメータの真値は、式(1)と比較すると  $a_{12} = -\sigma$ ,  $a_{13} = \sigma$ ,  $a_{22} = R$ ,  $a_{23} = -1$ ,  $a_{27} = -1$ ,  $a_{34} = -b$ ,  $a_{35} = 1$ 、その他のパラメータ  $a_{ij}$ は0である。こ

こで初期パラメータ  $a_0$ として、真値が0以外のパラメータについては、真値の80%、真値が0のパラメータについては0.01を与え、観測時点数を  $m=300$ として、パラメータ  $a_{ij}$ を非線形最小二乗法により求めた。得られた最適推定値  $a^*$ の結果を表-1に示す。この  $a^*$ を用いて、式(2)をRKG法により1000ステップ程解いた結果を図-1に示す。図-1より、観測時系列  $x$ においては、最小二乗法の観測期間である300ステップまでは精度良く再現されているが、それ以降はステップが進むに従って誤差が増大している。また時系列  $y, z$ については、 $y$ では  $x$ と同様に300ステップ以降から、 $z$ ではステップが進むにつれて誤差が増大している。

次に、得られた最適推定値  $a^*$ を初期推定値として与え、Lorenz方程式の  $x$ 時系列のみが観測されるとして、EKFにより時系列  $x, y, z$ の1ステップ先の逐次予測を1000ステップ程行なった結果を図-2に示す。これより、時系列  $x$ については予測は非常に精度良く行なわれているものの、非観測時系列  $y, z$ については、 $y$ では500ステップ以降から、 $z$ では時点が進むにつれて誤差が増大している。図-2の結果を図-1と比較すると、図-2では、非観測時系列  $y$ の予測において若干精度が上がっているものの、 $z$ については500ステップ以降誤差が大きくなっている。

### 4. むすび

本報では、EKFをカオス時系列の数学モデルのパラメータ同定および時系列の予測に適用する際に、より真値に近い初期推定値を得るため

に、数学モデルとしてカオスの挙動を引き起こす一般的な非線形項を含んだ常微分方程式を仮定し、その関数の各項の係数を未知パラメータとして、非線形最小二乗法によりパラメータの推定を行う手法を、Lorenz方程式の変数  $x$ のみを観測時系列とする場合に適用し、本手法のカオス時系列への適用性および特性について検討を行った。その結果、非線形最小二乗法における残差の二乗和  $S(a)$ は  $n$ 次元のパラメータ空間において複雑なふるまいをし、多数の極小点を持っていると考えられるので、ある程度真値に近い範囲で初期パラメータ  $a_0$ を設定しなければならないことがわかった。しかし逐次パラメータを修正するEKFと異なり、観測期間内では一定の最適パラメータ値を得ることができるので、これら2つの手法を併用しながら数学モデルの推定を行うことが効果的であると考えられる。

参考文献 1) 松本実・河村明・神野健二・許士国:カルマンフィルターによるカオス的な時系列の数学モデルの推定と予測について,土木学会西部支部研究発表会講演概要集,pp314~315,1993年3月. 2) 松本実・河村明・神野健二・許士国:カオス時系列に対するシステム方程式の構築について,第48回土木学会年次学術講演会概要集第2部,pp.304~305,1993年9月. 3) C. Nicolis: Is there a climatic attractor?, Nature vol.311,pp529~532,Oct.1984. 4) 田中正次ほか: FACOM FORTRAN SSL-II 使用手引書,富士通株式会社,pp.456~459,1980年12月.

表-1 パラメータの最適推定値  $a^*$

パラメータ	真値	最適推定値 $a^*$
$a_{12}$	-10	-7.975
$a_{13}$	10	8.042
$a_{22}$	28	22.41
$a_{23}$	-1	-0.7763
$a_{27}$	-1	-0.8443
$a_{34}$	-8/3	-2.139

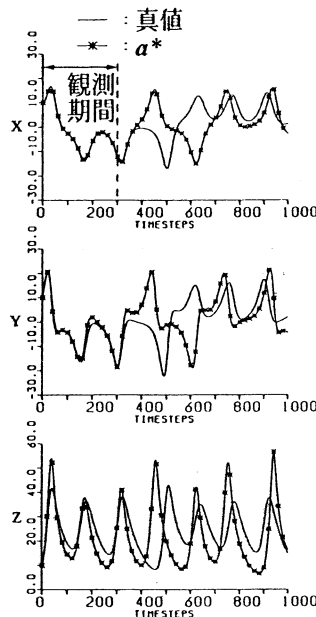


図-1 LMM法による最適推定値  $a^*$ を用いたLorenz時系列

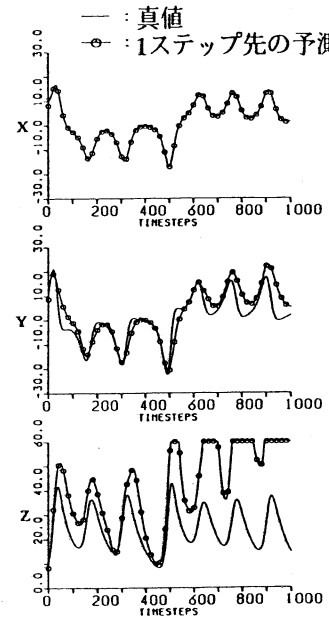


図-2 EKFによるLorenz時系列の予測