II－103　カオス時系列に対するシステム方程式の構築について

九州大学工学部　学生員　○松本　実
九州大学工学部　正　員　河村　明
九州大学工学部　正　員　神野　健二
九州大学工学部　許　士国

１．はじめに　多くの水文時系列は、例えば大局的なパターンは数学的法則に従っているが、２度と同じ値を繰り返さないという非周期性、またある時点でほとんど同一の値をとっていても先に行くにしたがってそのわずかな誤差が倍増してしまうという初期値に対する鋭敏な依存性など非線形のカオス的特徴を有していると考えられる。この場合、従来確率過程的に取り扱われていた時系列を、カオス論的な取扱いによりある程度物理的に解釈し、時系列の数学モデルの推定及び精度良い予測を行うことが可能であると考えられる。著者らはこれまでに、カオスを引き起こす微分方程式としてRössler方程式とLorenz方程式を対象とし、これらの微分方程式のパラメータは未知であるが、方程式の構造は既知として拡張カルマンフィルター（ＥＫＦ）によりカオス時系列の数学モデルのパラメータ同定及び時系列の予測を行い、本手法によりパラメータ同定及び時系列予測が精度よく行えることを示した[1),2)]。しかし実際の水文時系列においてはその時系列を生み出すシステム方程式の構造は未知と考えられるので、本報では数学モデルとしてカオス的挙動を引き起こす一般的な非線形項を含んだ常微分方程式を仮定して、まずその関数をTaylor級数展開する。そしてTaylor級数展開された関数の各項の係数を未知パラメータとして、ＥＫＦにより逐次同定しながら時系列の予測を行う手法をカオス的挙動を示すLorenz方程式の変数ｘのみを観測時系列とする場合に適用し、本手法のカオス時系列への適用性及び特性について検討している。

２．一般的非線形微分方程式に対する定式化　時系列を支配するシステム方程式の次元（独立変数の数）については、時系列のフラクタル次元を計算することにより決定することができる[3)]。ここではシステム方程式の数が３の場合を例にとり定式化を行う。３つの変数をｘ，ｙ，ｚとし、それらのシステム方程式が一階の連立常微分方程式で表されると仮定し、一般的な非線形微分方程式の関数 $f(x,y,z)$ をTaylor展開し、２次の項までとる以下の方程式を定める。

$$\left\{\begin{aligned}\dot{x}&=f_1(x,y,z)=a_{11}+a_{12}x+a_{13}y+a_{14}z+a_{15}xy+a_{16}yz+a_{17}zx+a_{18}x^2+a_{19}y^2+a_{110}z^2\\ \dot{y}&=f_2(x,y,z)=a_{21}+a_{22}x+a_{23}y+a_{24}z+a_{25}xy+a_{26}yz+a_{27}zx+a_{28}x^2+a_{29}y^2+a_{210}z^2\\ \dot{z}&=f_3(x,y,z)=a_{31}+a_{32}x+a_{33}y+a_{34}z+a_{35}xy+a_{36}yz+a_{37}zx+a_{38}x^2+a_{39}y^2+a_{310}z^2\end{aligned}\right. \quad\cdots(1)$$

ここに、$\dot{x},\dot{y},\dot{z}$ は x,y,z の時間 t に関する微分で、a_{ij} $(i=1\sim3, j=1\sim10)$ はパラメータである。

ここで、カルマンフィルター[4)]で推定すべきシステム状態量Ｘとして式(1)における x,y,z およびパラメータ a_{ij} をとる。すなわち　$X=[\ x_1\ x_2\ \cdots\ x_{32}\ x_{33}\ ]^T=[\ x\ y\ z\ a_{11}\ \cdots\ a_{110}\ a_{21}\ \cdots\ a_{21}\ \cdots\ a_{210}\ a_{31}\ \cdots\ a_{310}\ ]^T$（^{T}:転置）とする。Ｘの遷移方程式は $F(X)$ をＸのベクトル関数 $F=[\ f_1\ f_2\ \cdots\ f_{32}\ f_{33}\ ]^T$ とすると(1)式より次式で表される。　$\dot{X}=F(X)$　$\cdots(4)$

すなわち

$$\left\{\begin{aligned}\dot{x}_1&=f_1(X)=x_4+x_5x_1+x_6x_2+x_7x_3+x_8x_1x_2+x_9x_1x_3+x_{10}x_2x_3+x_{11}x_1{}^2+x_{12}x_2{}^2+x_{13}x_3{}^2\\ \dot{x}_2&=f_2(X)=x_{14}+x_{15}x_1+x_{16}x_2+x_{17}x_3+x_{18}x_1x_2+x_{19}x_1x_3+x_{20}x_2x_3+x_{21}x_1{}^2+x_{22}x_2{}^2+x_{23}x_3{}^2\\ \dot{x}_3&=f_3(X)=x_{24}+x_{25}x_1+x_{26}x_2+x_{27}x_3+x_{28}x_1x_2+x_{29}x_1x_3+x_{30}x_2x_3+x_{31}x_1{}^2+x_{32}x_2{}^2+x_{33}x_3{}^2\\ \dot{x}_i&=f_i(X)=0\ \ (i=4\sim33)\end{aligned}\right. \quad\cdots(5)$$

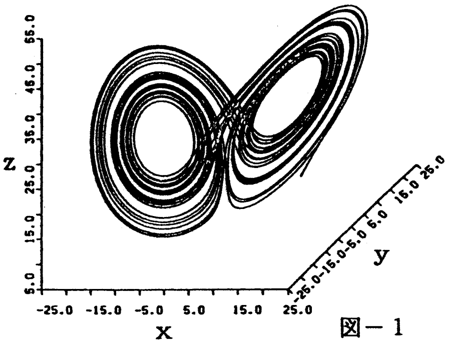
ここで、非線形ベクトル関数 $F(X)$ をＸの近傍 X^* においてTaylor級数展開し、１次の項までとり線形化するＥＫＦを適用する。

３．Lorenz方程式への適用　Lorenz方程式は式(6)で示される３元連立常微分方程式である。

$$\dot{x}=\sigma(y-x),\quad \dot{y}=Rx-y-xz,\quad \dot{z}=-bz+xy \quad\cdots(6)$$

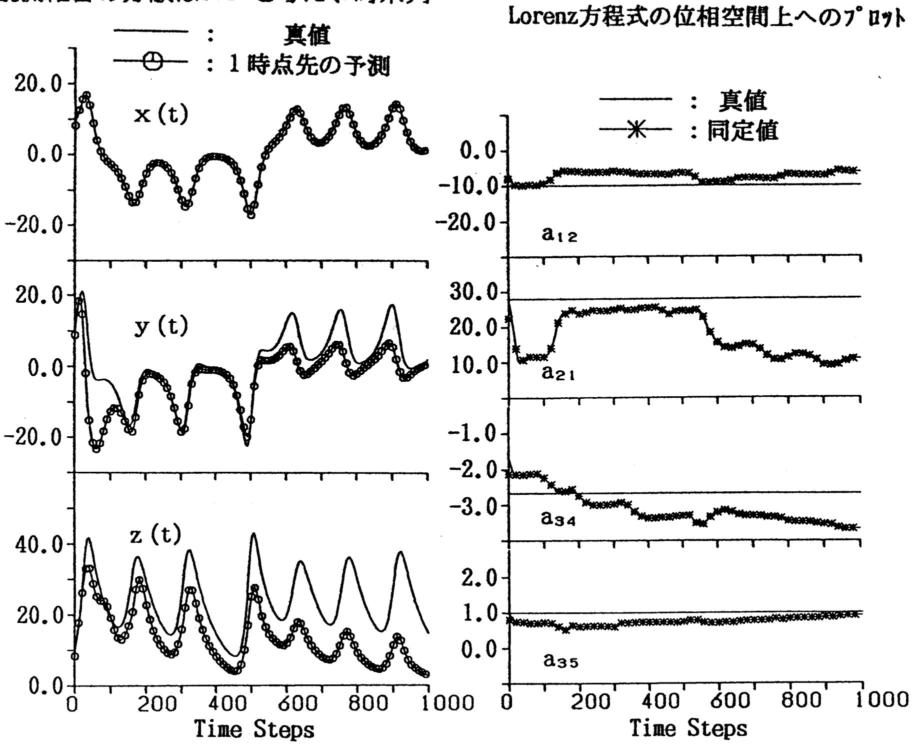
ここに、$\dot{x},\dot{y},\dot{z}$ は x,y,z の時間 t に関する微分、σ,R,b はパラメータであり、系の挙動に非常に敏感に作用する。カオス的現象の例としてよく用いられるのは、$\sigma=10, R=28, b=8/3$ である。ここで、時間間隔 $\Delta t=0.005$ とし、$t=t_0=0$ における x,y,z の初期値 $(x(0),y(0),z(0))=(10,10,10)$ として、Runge-Kutta-Gill法

により式(6)を10000ｽﾃｯﾌﾟ程数値計算で解いた結果の位相空間上へのﾌﾟﾛｯﾄは図-１のようになる。さて、Lorenz方程式のｘ時系列のみが観測されるとしてこのＥＫＦを適用する。式(1)のパラメータについては式(6)より$a_{12}=-\sigma, a_{13}=\sigma, a_{22}=R, a_{23}=-1, a_{27}=-1, a_{34}=-b, a_{35}=1$にそれぞれ対応しており、そのほかのパラメータについては０である。状態量Ｘの初期推定値$\hat{X}(0|0)$として、Lorenz方程式に対応するパラメータについては真値の80%、その他の値が０のパラメータについては0.1を与え、システム雑音ｕの共分散行列は$\hat{X}(0|0)$の共分散の1%を、観測雑音の分散は0.1^2を与え、時系列ｘ，ｙ，ｚの1ｽﾃｯﾌﾟ先の予測、また各パラメータの同定を1000ｽﾃｯﾌﾟ程行った結果を図－２に示す。



図－１
Lorenz方程式の位相空間上へのﾌﾟﾛｯﾄ

４．考察　図－２よりLorenz方程式に対応する各パラメータについては真値に近い値を同定しているものもあれば、誤差の大きなものもある。真値が０のパラメータについては、ほぼ真値の０に収束している。観測時系列ｘについては予測は非常に精度よく行われているものの、非観測時系列ｙ，ｚについては、ｙでは500時点以降から、ｚでは時点が進むにつれて誤差が増大している。次に、(1)式の全てのパラメータが未知として初期推定値として0.1を与えた場合には、観測時系列ｘについての予測は同様に精度よく行われたが、非観測時系列ｙ，ｚおよびそのほかのパラメータについてはあまり精度よい結果は得られなかった。



図－２　EKFによる時系列予測およびﾊﾟﾗﾒｰﾀの同定

５．むすび　本報では、数学モデルとしてカオス的挙動を引き起こす一般的な非線形項を含んだ常微分方程式を仮定して、その関数の各項の係数を未知パラメータとして、ＥＫＦにより逐次同定しながら時系列の予測を行う手法をカオス的挙動を示すLorenz方程式の変数ｘのみを観測時系列とする場合に適用し、本手法のカオス時系列への適用性及び特性について検討を行った。その結果、たとえそのシステム方程式が未知の場合でも観測時系列の予測は精度よく行われることが明らかになった。しかし非観測時系列の予測及びパラメータの同定の精度を上げるためには、さらにカオス特性値などを観測方程式に組み込むなどの検討が必要であると考えられる。

参考文献　1)許士国・神野健二・河村明他:Application of the extended Kalman filter for reconstructing systems from chaotic numerical time series, JSCE vol.37,pp853～856,1993年3月. 2)松本実・河村明・神野健二・許士国:カルマンフィルターによるカオス的な時系列の数学モデルの推定と予測について,土木学会西部支部研究発表会,pp314～315,1993年3月. 3)C.Nicolis:Is there a climatic attractor?,Nature vol.311, pp529～532,Oct.1984. 4)河村明・神野健二・上田年比古・土井敬介:上水道配水管網系の節点需要量のオンライン予測に関する研究,土木学会論文集,No.405号/II-11,pp.245～254,1989年5月.