

10 移流分散確率過程で表される降雨分布の実時間予測について

九州大学工学部 ○河村 明  
九州大学工学部 神野 健二  
運輸省港湾技研 吉永 宙司

1. はじめに

市街化等に伴う急激な雨水流出に対する都市流出の実時間予測は、下水管からの氾濫等の浸水問題を最小限に食い止め、下水道システムの実時間最適運用を行う上で非常に重要な問題となっている<sup>1)</sup>。この場合、都市流出モデルの入力となる降雨強度の時間的空間的予測が必要不可欠となるが、現在のところ降雨分布の時空間的予測はかなり困難なものとなっている。これは、都市規模（小規模）の降雨を時空間的に支配する物理的機構がよく解明されていないことが主な要因となっている<sup>2)</sup>。北部ヨーロッパで見られる都市規模（1～5km<sup>2</sup>）の降雨現象は、雨域が小さな都市域を通過する間に、降雨セルの形状はあまり変化せず徐々に分散しながら短時間に風により移流してゆくことが知られている<sup>3)</sup>。そこで本研究では、都市規模降雨の実時間予測の第一段階としてまず、降雨強度分布を支配するシステムとして空間的に一定の物理パラメーターを持つ移流分散方程式にランダムな変動が加わる定係数2次元確率移流分散方程式を取り上げる。この場合、初期条件、境界条件および方程式中の物理パラメーター（流速、分散係数、1次反応係数）は未知として取り扱っている。著者らは既に移流分散方程式の解析解を用いた実時間降雨予測手法を検討している<sup>4)</sup>が、本報ではさらに確率移流分散方程式を2重フーリエ級数展開を用いてフーリエ係数に関する連立常微分方程式に変形したのち、拡張カルマンフィルターにより、各時点毎に物理パラメーターおよびフーリエ係数を逐次同定しながら、降雨分布実時間予測を行う手法を提案する。次に、本手法をまず素性のはっきりした模擬発生降雨データに適用し、その有効性および種々の特性について検討したのち、本手法をスウェーデンルンド市における1分間隔降雨データに対し適用し、その有効性および予測精度について検討を行っている。

2. 予測手法の定式化

ここでは同定すべきパラメーターの数を減少させるため、降雨の移動方向に関する風向、風速の情報は気象データとして事前に入手できること<sup>5)</sup>を積極的に活用し、次式に示すような降雨の移動方向にx軸をとった場合の定係数2次元確率移流分散方程式を考えることにする。

$$\frac{\partial R(x,y,t)}{\partial t} + u \frac{\partial R(x,y,t)}{\partial x} = D_x \frac{\partial^2 R(x,y,t)}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 R(x,y,t)}{\partial y^2} - \gamma R(x,y,t) + \varepsilon(x,y,t) \quad (1)$$

ここに、R：降雨強度(m/min)    x, y：x軸、y軸上の座標(m)    u：x軸方向の降雨の移動速度  
γ：1次反応係数(1/min)    D<sub>x</sub>, D<sub>y</sub>：x, y軸方向の分散係数(m<sup>2</sup>/min)    t：時刻  
ε：平均0、分散σ<sub>v</sub><sup>2</sup>の正規性白色雑音(m/min<sup>2</sup>)

ここで、R(x, y, t) および ε(x, y, t) を次式のように変数 x, y に関する2重フーリエ級数に展開する。

$$R(x,y,t) = \frac{A_{00}(t)}{2} + \sum_{m=1}^N \sum_{n=0}^N [A_{mn}(t) \cos F_1(x,y,m,n) + B_{mn}(t) \sin F_1(x,y,m,n)] + \sum_{m=0}^N \sum_{n=1}^N [C_{mn}(t) \cos F_2(x,y,m,n) + D_{mn}(t) \sin F_2(x,y,m,n)] \quad (2)$$

$$\varepsilon(x,y,t) = \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N [E_{mn}(t) \cos F_1(x,y,m,n) + F_{mn}(t) \sin F_1(x,y,m,n)] + G_{mn}(t) \cos F_2(x,y,m,n) + H_{mn}(t) \sin F_2(x,y,m,n) \quad (3)$$

$$F_1(x,y,m,n) = 2\pi m x / l_x + 2\pi n y / l_y, \quad F_2(x,y,m,n) = 2\pi m x / l_x - 2\pi n y / l_y \quad (4)$$

ここに、 $A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, D_{mn}, E_{mn}, F_{mn}, G_{mn}, H_{mn}$  :  $R$ のおよび $\epsilon$ の波数 $m, n$ に関するフーリエ係数  
 $(m/\text{min}) \quad \ell_x, \ell_y$  :  $x, y$ 軸方向の基本波長 (m)  $M, N$  : 組み込むフーリエ級数の項数  
 式(2)、式(3)を式(1)に代入して、波数 $m, n$ に対するフーリエ係数に関する連立常微分方程式に変形すると次式となる。

$$\begin{bmatrix} dA_{mn}(t)/dt \\ dB_{mn}(t)/dt \\ dC_{mn}(t)/dt \\ dD_{mn}(t)/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P_{mn} & -Q_m & 0 & 0 \\ Q_m & -P_{mn} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -P_{mn} & -Q_m \\ 0 & 0 & Q_m & -P_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{mn}(t) \\ B_{mn}(t) \\ C_{mn}(t) \\ D_{mn}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_{mn}(t) \\ F_{mn}(t) \\ G_{mn}(t) \\ H_{mn}(t) \end{bmatrix} \quad (5)$$

ここに、
$$P_{mn} = D_x \left( \frac{2\pi m}{\ell_x} \right)^2 + D_y \left( \frac{2\pi n}{\ell_y} \right)^2 + \gamma, \quad Q_m = u \left( 2\pi m / \ell_x \right) \quad (6)$$

ここで、式(1)の $u, D_x, D_y, \gamma$ および式(2)のフーリエ係数 $A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, D_{mn}$ をカルマンフィルターにおけるシステム状態量 $X$ として推定すべき量にとると、状態量の次元数は $(4MN + 2M + 2N + 5)$ となる。次に、カルマンフィルターの観測量は、空間に任意に配置された観測点 $(x, y)_j$  ( $j=1 \sim M_p$ )から観測雑音 $w$ を含んだ降雨強度 $R$ があるサンプリング時間間隔で定期的に観測されるとすると、

$$R(x, y, k) = [0, 0, 0, 0, 1/2, \cos F_1(x, y, m, n), \sin F_1(x, y, m, n), \cos F_2(x, y, m, n), \sin F_2(x, y, m, n)] \\ [u, D_x, D_y, \gamma, A_{00}, A_{mn}(k), B_{mn}(k), C_{mn}(k), D_{mn}(k)]^T + w(x, y, k) \quad (7)$$

後は、式(5)を線形化して離散型拡張カルマンフィルターを適用すれば、各時点毎に $X$ の最適推定値が求められ、これを用いて降雨強度 $R$ の予測が行われる。なお、カルマンフィルターによる詳しい定式化および1次元移流分散確率過程に対する本手法の特性については参考文献5)を参照されたい。

### 3. 適用例

模擬発生降雨の発生方法は以下のものである。まず次の矩形分布を考える。

$$R(x, y, 0) = \begin{cases} R_0 & (x_1 \leq x \leq x_2, y_1 \leq y \leq y_2) \\ 0 & (0 \leq x < x_1, x_2 < x \leq \ell_x, 0 \leq y < y_1, y_2 < y \leq \ell_y) \end{cases} \quad (8)$$

ここで、 $R_0=50(\text{m}/\text{min})$ 、 $x_1=0.0(\text{m})$ 、 $x_2=10.0(\text{m})$ 、 $y_1=2495.0(\text{m})$ 、 $y_2=2505.0(\text{m})$ とし、また式(1)の $u=100(\text{m}/\text{min})$ 、 $D_x=30000(\text{m}^2/\text{min})$ 、 $D_y=10000(\text{m}^2/\text{min})$ 、 $\gamma=0(1/\text{min})$ 、離散時間間隔 $\Delta t=0.1(\text{min})$ 、 $\ell_x=15000(\text{m})$ 、 $\ell_y=5000(\text{m})$ 、フーリエ級数の項数 $M=N=10$ を与え、式(1)の雑音項 $\epsilon$ を除いて解析的に求めた10分後の降雨分布を改めて模擬発生降雨の初期分布とした。この初期分布をもとに式(5)の係数 $E_{mn}(t), F_{mn}(t), G_{mn}(t), H_{mn}(t)$ に平均値0、分散 $\sigma_v^2=(4 \times 10^{-5})^2$ を与えて降雨を500時点ほど模擬発生させたものを真値とする。この模擬発生降雨分布の10分後(100時点後)と30分後(300時点後)の形状を図-1の実線に示している。なお、実際に各観測点で観測される降雨強度は上述の真値にさらに平均0、分散 $(2 \times 10^{-3})^2$ の観測雑音を加わったものである。以上の模擬発生降雨分布に対して、2. で述べた手法により降雨分布予測を行う。この場合、状態量 $X$ の初期値には真値の50%の値を与え、観測点は図-1の様に12地点、観測時間間隔10時点(1分)おき、組み込むべきフーリエ級数の項数 $M=N=10$ とした条件下(ケース1)での本手法による10時点(1分)先の予測値の分布を図-1の破線で示している。また図-2には非観測点(座標値 $x=3000, y=2500(\text{m})$ )および観測地点No.2における降雨強度の予測値を示している。図-3には物理パラメーターおよびフーリエ係数の同定結果の一部を示している。さらに表-1には本手法を種々の条件下で適用した場合の次式で表される予測精度 $J$ を示している。

$$J_k = \sqrt{\sum_x \sum_y [\hat{R}(x, y, k | k-i) - R(x, y, k)]^2 / N_1}, \quad J = \sum_k J_k / N_2 \quad (9)$$

ここに、 $\hat{R}(x, y, k | k-i)$  :  $(k-i)$ 時点までの観測量が得られた場合の $R(x, y, k)$ の予測値

$N_1$  : 評価地点数で観測地点(12地点)のみで評価する場合の $J$ を $J_{0.0}$ とする。また1mメッシュ間隔の各地点(3876地点)で評価する場合の $J$ を $J_{0.1}$ とする。

$N_2$  : 評価時点数で、ここでは100時点から500時点までの100時点おきの5時点とした。

次に、スウェーデンルンド市で観測された1979年6月25日の午前1時1分から1時23分までの1分間隔降雨データに本手法を適用した。ルンド市の観測点は図-1に示した配置となっていて12地点ありx軸の正方向が東となっている。また、風速と風向も同時に気象データとして得られ、降雨の移動速度は1036.4(m/min)、移動方向は北から時計回りに10°の方向に移動していた。図-4に観測点No.5, No.9における1分先の降雨予測結果を示している。

#### 4. 考察

図-1の実線の降雨分布の真値は式(1)のシステム雑音 $\epsilon$ の影響を受けて時点の進行とともに分布の乱れが大きくなっているが、破線の本手法による10時点(1分)先の予測値を見ると、高周波成分の小さな変動成分の予測値は困難なものの、時点の進行とともに降雨分布が乱れても精度良く降雨分布の形状を予測しているといえよう。また、図-2より観測地点、非観測地点ともに精度良く真値を予測しており、観測地点数が12地点でも十分に予測は可能であるといえる。次に図-3の $u$ ,  $A_{00}$ ,  $A_{11}$ の同定結果を見ると、およそ100時点(10分)程度で同定値が収束しており、それ以降はいずれも真値を精度良く同定している。また $D_x$ は時点の進行とともに真値に近づき、最終同定値はほぼ真値と一致している。次に、表-1より観測地点のみで $J$ を評価した $J_{obs}$ と、全地点に対して評価した $J_{all}$ を比較すると、 $J_{obs}$ は $J_{all}$ の約1/5で、観測地点における予測精度はその他の地点に比べてかなり良いといえる。次に観測地点数を降雨分布のピークが通過する付近の6点に集中させた場合(ケース2)と、6点を

$x-y$ 平面にほぼ均等に分散させた場合(ケース3)の予測精度を比較すると、 $J_{obs}$ は集中型の方が良く、 $J_{all}$ は分散型の方が良くなっている。これは、降雨濃度の高い部分に観測地点を集中させるとこの部分の予測精度は良くなるが、全地点に対して評価すると観測地点のない部分の予測精度が悪くなるためと考えられる。次に観測データの入手時間間隔を50時点おきにした場合(ケース4)、ケース1と比較して $J_{obs}$ は大きくなっているが $J_{all}$ はほとんど変わらず全体的に予測する場合は50時点おきでも精度良い予測が可能といえる。次に組み込むべきフーリエ級数の項数を $M=N=5$ に減らした場合(ケース5)、 $J_{obs}$ はケース1とほとんど変わらず、 $J_{all}$ はやや悪くなっているものの、項数5で十分の精度が得られている。

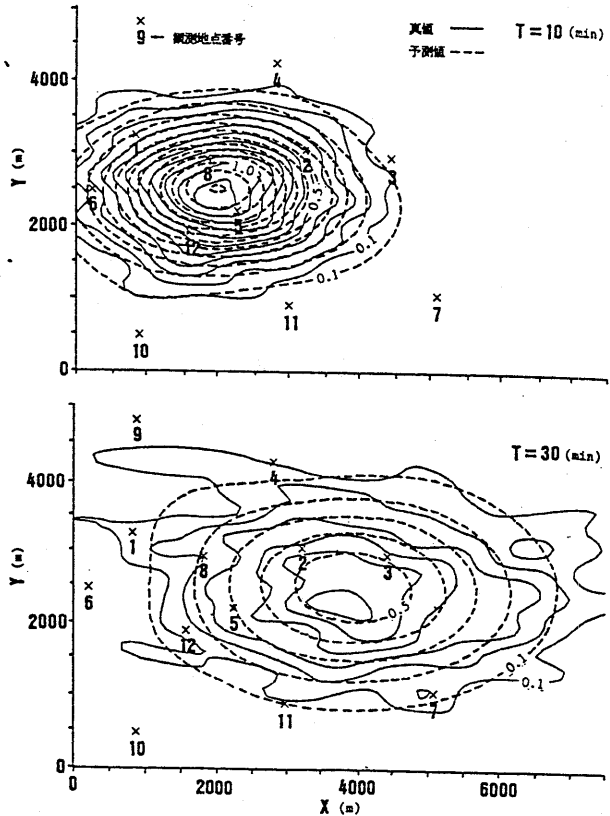


図-1 模擬発生降雨分布とその予測値

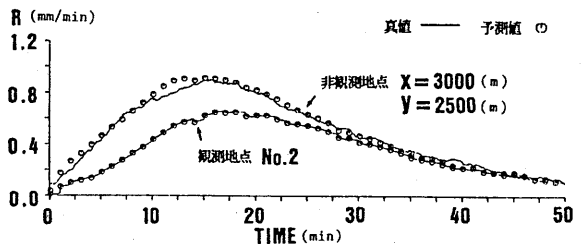


図-2 観測点と非観測点における模擬発生降雨分布の時間的变化とその予測値

次に図-4のルンド市の降雨予測結果について考察すると概ね精度良く予測でき、ピーク値もよく捉えているといえる。また他の観測地点でも同程度の予測結果が得られ、 $J_{obs}$ の値は0.091である程度精度良い予測が可能であることが示された。またその他に、カルマンフィルターのシステム状態量の初期値の精度良い設定などが精度良い予測に結びつくことが明らかになった。

5. むすび

本研究では、移流分散確率過程として定係数二次元確率移流分散方程式で表される降雨分布を拡張カルマンフィルターによって実時間予測を行う手法を定式化し、本手法を模擬発生データおよび実測データに対して適用した。その結果、物理パラメーターおよびフーリエ係数の同定を行いつつ精度良く降雨分布の予測を行うことが可能であることが示され、本手法の種々の特性が明らかとなった。

参考文献

- 1) 坪田 浩治：雨水流入量予測システム、第3回水システム自動計測制御国内ワークショップ論文集、pp.269~270, 1989年10月。
- 2) Berndtsson, R. and J. Niemczynowicz : Spatial and Temporal Scales in Rainfall Analyses - Some Aspects and Future Perspectives, Journal of Hydrology Vol.100, pp.293-314, 1988.
- 3) Niemczynowicz J. : Rainfall data for urban hydrological applications, International Workshop on Precipitation Measurement, WMO, St.Moritz, pp.4-7, December 1989.
- 4) Jinno K., A. Kawamura, M. Larson, R. Berndtsson and J. Niemczynowicz : A Convective-Dispersion Model for Real-time Prediction of Urban-Scale Rainfall, Fifth International Conference on Urban Storm Drainage, July, 1990.
- 5) Niemczynowicz J. and O. Jonsson : Extreme Rainfall Events in Lund 1979-1980, Nordic Hydrology No.12, pp129-142, 1981.
- 6) 河村 明・神野健二・上田年比古・吉永宙司：カルマンフィルターによる定係数一次元確率移流分散方程式のオンライン濃度分布予測について、九州大学工学集報第62巻第1号、pp.17-24, 1989年1月。

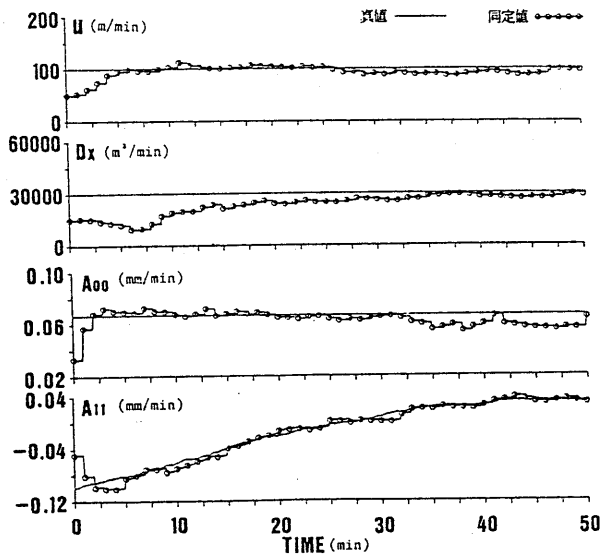


図-3 物理パラメーターとフーリエ係数の同定結果

表-1 種々の条件下での予測精度

ケース	① 観測地点数およびその配置 ② 観測データの入手時間間隔 ③ 組み込むべきフーリエ級数の項数			$J_{obs}$ (mm/min)	$J_{all}$ (mm/min)
	①	②	③		
1	12	10	10	0.022	0.103
2	6 (集中型)	10	10	0.024	0.119
3	6 (分散型)	10	10	0.025	0.110
4	12	50	10	0.037	0.105
5	12	10	5	0.021	0.113

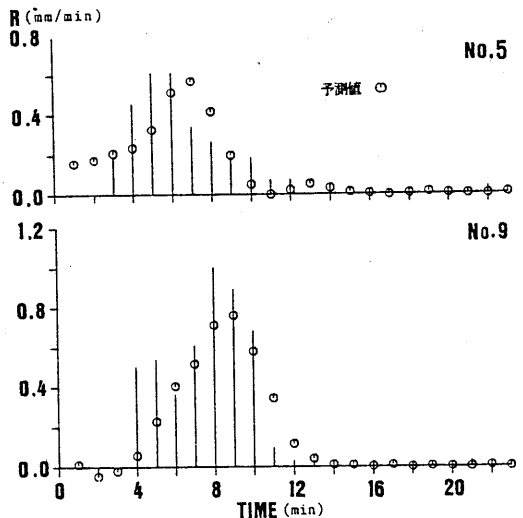


図-4 ルンド市における実測1分間降雨データとその予測値

キーワード：降雨予測、移流分散、確率過程、2重フーリエ級数、カルマンフィルター