

II-79 定係数一次元確率移流分散方程式の濃度予測手法の特性について(第2報)

九州大学工学部 ○学生員 吉永 宙司 九州大学工学部 正員 河村 明  
九州大学工学部 正員 神野 健二 九州大学工学部 正員 上田 年比古

1. はじめに 一般に自然現象は確率過程と考えられ、その挙動は確率微分方程式で表現される。著者らは確率微分方程式として定係数一次元確率移流分散方程式を取り上げ、濃度をフーリエ級数展開して連立常微分方程式に変形し、定時観測データを用いて拡張カルマンフィルターにより、物理パラメータすなわち物理量(流速  $u$ 、分散係数  $D$ 、一次反応係数  $\gamma$ )を逐次同定しながら濃度予測を行う手法を提案し<sup>1)</sup>、また本手法を模擬発生データに適用しその特性について検討を行っている<sup>2)</sup>。本報では定係数一次元確率移流分散方程式に従う濃度の模擬発生の際に非線形常微分方程式を数値的に解く方法としてルンゲ・クッタ・ギル法(RKG法)を用い、また濃度予測を行う場合にはカルマンフィルターの連続時間非線形状態方程式をRKG法により解き、ある離散時間間隔で観測量がサンプリングされる場合の本手法の特性について検討している。すなわち観測情報の入ってくるサンプリング時間間隔の変化、組み込むべきフーリエ級数の項数の変化と濃度予測精度との関係などについて検討を行っている。

2. 計算手法 ここでは次式に示すような定係数一次元確率移流分散方程式を考えることにする。

$$\partial C(x,t)/\partial t + u \partial C(x,t)/\partial x = D \partial^2 C(x,t)/\partial x^2 - \gamma C(x,t) + \alpha \varepsilon(x,t) \quad (1)$$

ここに、 $C$ :濃度、 $u$ :流速、 $D$ :分散係数、 $\gamma$ :一次反応係数、 $\alpha$ :システム雑音強度、 $\varepsilon$ :平均値0の正規性白色雑音、 $x$ :距離、 $t$ :時刻。なお $u$ 、 $D$ 、 $\gamma$ は時空間的に一定の場合を想定している。まず濃度 $C$ を次式のようにフーリエ級数に展開する。

$$C(x,t) = M(t) + \sum_{m=1}^{\infty} [A_m(t) \sin(2\pi mx/\ell) + B_m(t) \cos(2\pi mx/\ell)] \cdots (2) \quad \text{式(2)を式(1)に代入して、}$$

$M(t)$ および波数  $m$ に対するフーリエ係数 $A_m(t)$ 、 $B_m(t)$ に関する連立常微分方程式に変形する<sup>1)</sup>。ここで物理量 $u$ 、 $D$ 、 $\gamma$ およびフーリエ係数 $M$ 、 $A_m$ 、 $B_m$ をカルマンフィルターのシステム状態量 $x$ とするとその状態方程式は上述の連立常微分方程式より次式のようになる。

$$dx/dt = f(x(t)) \cdots (3) \quad \text{また } x \text{ 方向}$$

に任意に配置された観測点から観測雑音を含んだ濃度 $C$ があるサンプリング間隔で定時的に観測される場合を想定し、この観測情報をもとにカルマンフィルターにより、状態量 $x$ を逐次同定してゆき<sup>3)</sup>、濃度 $C$ の予測を行う。なお本報では式(3)の状態方程式を解くのにRKG法を用いている。

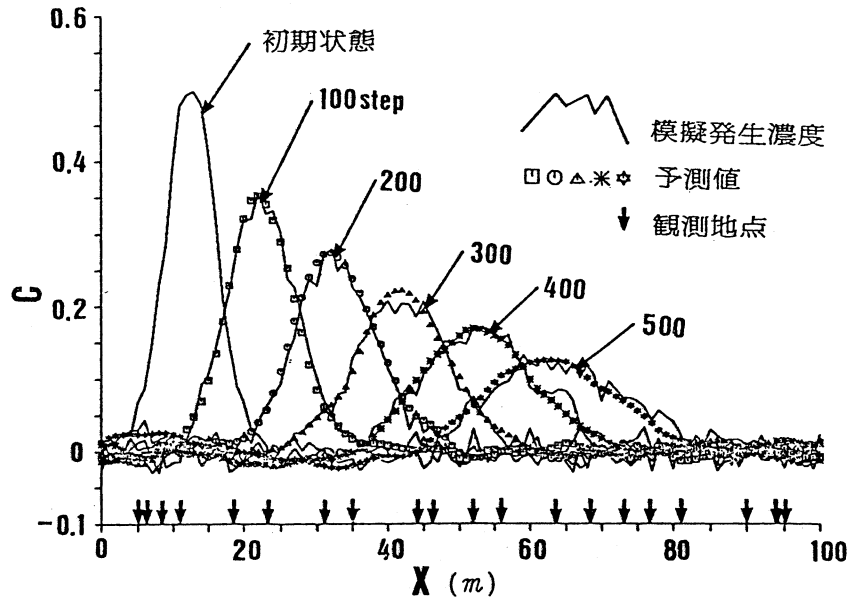
3. 適用例 以上の手法を以下の模擬発生データに適用する。ここではフーリエ級数展開の波数 $m$ を20とし、 $u=1.0(\text{m/s})$ 、 $D=0.5(\text{m}^2/\text{s})$ 、 $\gamma=0.01(1/\text{s})$ 、離散時間  $\Delta t=0.1(\text{s})$ を想定して、式(1)の $\alpha=0.0005$ 、観測雑音は平均値0標準偏差0.01の正規乱数を与え、500時点ほど濃度 $C$ を模擬発生させた。これを図-1の実線に示す。次に物理量 $u$ 、 $D$ 、 $\gamma$ およびフーリエ係数 $M$ 、 $A_m$ 、 $B_m$ の初期値には真値の50%の値を与え、濃度観測点が図-1のようにランダムに20点、そして物理量のうち $u$ が任意の1地点で標準偏差が10%の誤差で観測され、また10時点ごとにつまり1秒おきに濃度 $C$ 、流速 $u$ が観測されるところとした場合の濃度予測結果を図-1に示している。またサンプリング時間間隔を変化させた場合の次式による予測残差平方和のルート $J$ の値を図-2に示している。

$$J_i = \sqrt{\sum_x [C(x,k) - \hat{C}(x,k)]^2 / N} \cdots (4)$$

$J = \sum_i J_i / N_i \cdots (5) \quad \text{ここに、} \hat{C}: \text{濃度 } C \text{ の予測値、} N: \text{評価地点数でこの場合 } N=101, N_i: \text{評価時点数この場合100時点から500時点までの100時点おきの5時点とした。また図-3にはフーリエ級数の項数に対する } J \text{ の値を示している。}$

4. 考察 図-1よりカルマンフィルターによる予測値をみると、雑音に埋もれている高周波成分の小さな変動分布の予測は、困難なものの、時点の進行とともに濃度分布が乱れても精度良く濃度分布形状を予測している。次に図-2より濃度観測点数が10以下の場合、 $u$ を観測した場合は観測物理量なしの場合に比べ $J$ の値はかなり小さくなっているが、濃度観測点数が15以上になると $J$ の値にほとんど差がなく双方とも観測雑音の標準偏差である0.01に近づいている。すなわち濃度観測点数をある程度多くとると観測物理量の有無に関係なく

濃度予測は精度良く行われる。次に観測量のサンプリング時間間隔を変化させると、 $u$ を観測した場合は時間間隔を短くすると精度が良くなるが、濃度観測点数が15以上となるとサンプリング時間間隔は1時点でも10時点でもほとんど差がない。次に観測物理量なしの場合、濃度観測点数が15以上の場合は $u$ を観測した場合と同様のことがいえるが、濃度観測点数が少なくなるとサンプリング時間間隔が短くなっても精度は向上していない。これは、カルマンフィルタは観測点のみの予測誤差を



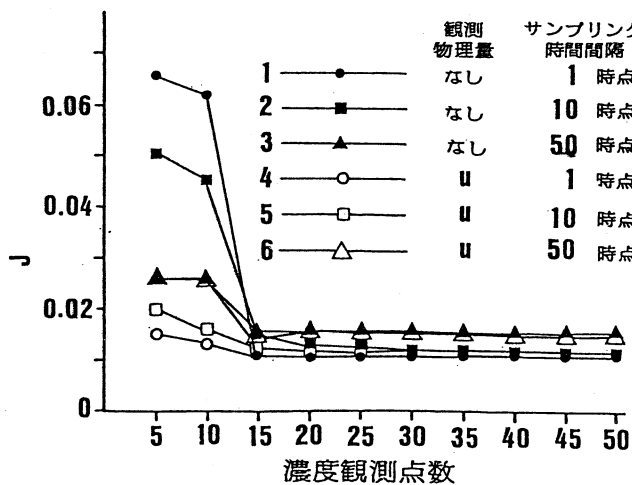
図一 1 模擬発生濃度とその10時点先の予測値

フィードバックしパラメータを修正するので、濃度観測点数が少ない場合は観測地点のみの予測誤差が向上し全体的な予測誤差がかえって低下するためと考えられる。事実、観測地点のみで予測精度を評価するとサンプリング時間間隔の短い方が高精度となっている。最後に図-3より組み込むべきフーリエ級数の項数と予測精度との関係についてみると、濃度観測点数が15以上の場合はフーリエ級数の項数が10以上あれば予測精度はほとんど変化がない。また濃度観測点数が10以下と少なくなると項数10の方が項数15、20よりも予測精度が良く

なっている。これは観測点が少ない場合、項数が多くなると同定すべきパラメータが多くなるので、これらのパラメータをかえって精度良く同定できず予測精度が低くなるものと考えられる。

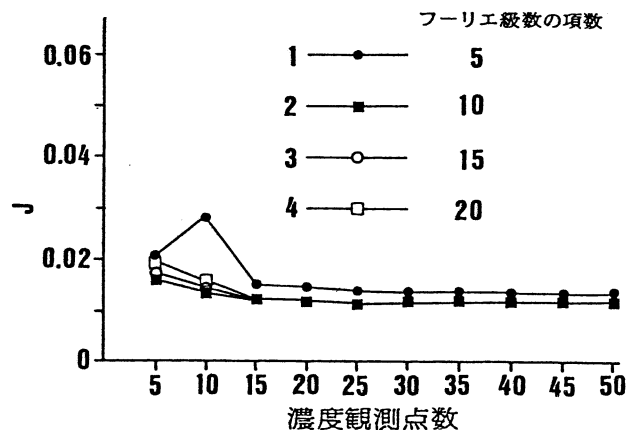
5. むすび 本報では定係数一次元確率移流分散方程式の濃度予測を行う場合、カルマンフィルタの連続時間非線形状態方程式をRKG法により解き、次に本手法を模擬発生データに適用した結果、観測量のサンプリング時間間隔、フーリエ級数の項数などの濃度予測精度に対する影響が評価された。

参考文献 1)河村明、神野健二、上田年比古：定係数一次元確率移流分散方程式の濃度予測手法について、土木学会第42学会第42回年次学術講演会概要集、pp.6~7,昭和62年9月。 2)吉永宙司、河村明、神野健二、上田年比古：定係数一次元確率移流分散方程式の濃度予測手法の特性について、昭和62年度土木学会西部支部研究発表会講演概要集、pp.230~231,昭和63年3月。 3)Athans, M. Wisher, R. P. & Bertolini, A. (1968): Suboptimal state estimation for continuous-timenonlinear system from discrete noisy measurment.



図一 2 観測物理量およびサンプリング時間間隔による予測精度の変化

IEEE Trans. on AUTOMATIC CONTROL. AG-13(5), pp. 504-514.



図一 3 フーリエ級数の項数と予測精度