

九州大学大学院 学生員 ○河村 明
九州大学工学部 正員 神野 健二
九州大学工学部 正員 上田 年比古

1. はじめに 自然現象の多くは非定常現象であると考えられるが、非定常システムの同定問題を考える場合、システムの特性格要素に予期し得ない異常値を含む場合を考慮する必要がしばしばある。著者らはすでに、5本の卓越周期関数で表される時系列の動特性が途中でジャンプ的に変化する場合の模擬データに対して適応的カルマンフィルタを適用し、これがシステムの異常値量やパワースペクトルの変化量を速やかにかつ正確に同定でき、非定常現象の予測に効果的であることを示した¹⁾。本報では、10本の卓越周期関数で表される時系列の動特性が途中で変化する場合の模擬データに対して、適応的カルマンフィルタの異常値検出性能および特性を検討した。

2. 適応的カルマンフィルタによる定式化 適応的カルマンフィルタは(1)式のようなシステム方程式で表されるシステムの状態量 x を推定するのに適用される手法であり、 x は(2)式の観測方程式を通してのみ観測される。この手法は一般化尤度比検定法によりシステムの異常値 $\delta G(k)$ の有無を観測時系列の変動状況から検定し、もし異常値が検出されれば、その発生時点および大きさを定量的に推定し、異常値の大きさに応じて状態量を修正するものである。(詳しくは参考文献2)を参照)異常値発生時点 θ の最尤推定値 $\hat{\theta}$ は(6)式で定義される異常検出指標 $\varphi_*(k, l)$ を最大とする時点として(3)式で求められ、この $\hat{\theta}$ を θ と考えて(4)式より異常値の有無を検定し、もし異常値が検出されれば、(5)式より異常値量の最尤推定値 $\hat{\delta G}(\hat{\theta})$ が求められる。ここで時系列 y が(1)

式のような周期関数の形式で表されると、(2)式の観測方程式において $H(k)=[\sin 2\pi f_1 k \quad \cos 2\pi f_1 k \quad \dots \quad \sin 2\pi f_m k \quad \cos 2\pi f_m k]$ 、 $x(k)=[A_1, B_1, \dots, A_m, B_m]^T$ とし、(1)式の $\Phi(k)=I$ とすれば、これは周波数成分を既知の観測行列として各周波数成分に対する振幅をシステム状態量として同定する問題となる。

3. 計算例 (1)式の $m=10$ 、 $[f_1, f_2, \dots, f_{10}] = [1/360, 1/144, 1/108, 1/72, 1/36, 1/18, 1/9, 1/7, 1/6, 1/3]$ とし、 w には $N(0, 0.5^2)$ の正規乱数を与え、 $k=180$ 時点で各周波数成分に対する振幅が変化する場合を360ステップ程模擬発生させた。この時系列に対し、適応的カルマンフィルタにおいて $l=60$ 、 $K=300$ とした場合の1ステップ先の予測値、イノベーション、異常検出指標の値をそれぞれ図-1(a),(b),(c)に示す。またこの場合の $f_{10}=1/360$ に対する振幅 A_{10}, B_{10} の同定結果を図-2に、通常のカルマンフィルタによるイノベーションを図-3に示す。ここで、(5)、(6)式の計算には(8)式の m の逆行列を計算しなければならない。本計算例のように観測量がスカラーの場合、(8)式で加算されるそれぞれの項のランクは1であるので、 l を状態量ベクトルの次元 n (本計算例では $n=20$)以上に選ばなければ $m(n \times n$ 行列)はフルランクにならず逆行列は計算できない。本計算例では図-4に示すように、 l が15以後 m のランクは徐々に

$$x(k+1) = \Phi(k)x(k) + \Gamma(k)u(k) + \delta_{k\theta}\delta G(k) \quad y(k) = H(k)x(k) + w(k) \quad \dots(1)(2)$$

k : 時点, x : 状態量ベクトル, Φ, Γ : 既知のシステム行列, u : システム雑音, $\delta_{k\theta}$: クロネッカーのデルタ, θ : 異常値発生時点, $\delta G(k)$: k 時点における未知の異常値量, y : 観測ベクトル, H : 観測行列, w : 観測雑音

$$\hat{\theta} = \max_k \varphi_*(k, l) \quad \dots(3) \quad \delta \hat{G}(\hat{\theta}) = \mu^{-1}(\hat{\theta}, l) \varphi(\hat{\theta}, l) \quad \dots(5)$$

ここで,

$$\varphi_*(\theta, l) \geq \eta \quad \dots(4) \quad \varphi_*(\theta, l) \triangleq \sqrt{\varphi^T(\theta, l) \mu^{-1}(\theta, l) \varphi(\theta, l)} \quad \dots(6)$$

$$\varphi(\theta, l) \triangleq \sum_{i=1}^l A^T(\theta, \theta+i) V^{-1}(\theta+i) y(\theta+i) \quad \dots(7)$$

$$\mu(\theta, l) \triangleq \sum_{i=1}^l A^T(\theta, \theta+i) V^{-1}(\theta+i) A(\theta, \theta+i) \quad \dots(8)$$

$$A(\theta, \theta+i) \triangleq H(\theta+i) \Psi(\theta, \theta+i) \quad \dots(9) \quad (\text{ただし } \Psi(\theta, \theta+1) = I)$$

$$\Psi(\theta, \theta+i) \triangleq \Phi(\theta+i-1) [I - K(\theta+i-1)H(\theta+i-1)] \Psi(\theta, \theta+i-1) \quad \dots(10)$$

H_0 : 異常値 $\delta G(\theta)$ が発生していないという仮説, H_1 : $k = \theta$ において異常値 $\delta G(\theta)$ が発生しているという仮説,
 K : カルマンゲイン, ν : イノベーション, V : ν の分散, η : 閾値, l : 検定に用いるイノベーション蓄積個数, τ : 転置記号, I : 単位行列, \triangleq : 定義

$$y(k) = \sum_{i=1}^m (A_i \sin 2\pi f_i k + B_i \cos 2\pi f_i k) + w(k) \quad \dots(11)$$

k : 時点, m : 周波数成分の個数, f_i : 周波数成分, A_i, B_i : f_i に対する振幅

$$A A^T A = A \quad \dots(12), \quad A^T A A^T = A^T \quad \dots(13)$$

$$A A^T = (A A^T)^T \quad \dots(14), \quad A^T A = (A^T A)^T \quad \dots(15), \quad (A^T)^T = A \quad \dots(16)$$

にしがらず $l = 45$ でフルランクの 20 になっている。ランク不足の場合、逆行列を一般化逆行列で代用することが考えられる。任意の行列 A の一般化逆行列 A^+ とは (12) ~ (16) 式の性質を満足する行列である³⁾。図-5 に $l = 40$ とした場合すなわち μ のランクが 19 で一般化逆行列を用いた適応的カルマンフィルターの適用結果を示している。

4. むすび 10本の周波数成分で構成される図-1 (a) の模擬時系列はかなり複雑な形状をしており、見ただけでは時系列の変化は識別できないが、 $l = 60$ の適応的カルマンフィルターでは $\hat{\theta} = 179$ が得られた。そして各振幅の修正が図-2 のように異常値発生時点の検出以後 (242 時点以後) 速やかに行われており、従って図-1 (a), (b) のように予測値もかなり正確に求まり、予測残差も図-3 の通常のカルマンフィルターに比べて小さくなっている。ここで、各振幅の異常値量の推定誤差は長周期成分に対する振幅程大きくなり、特に $1/4$ 以上の長周期成分に対してこの誤差が著しかった。しかし最終時点 (360 時点) ではこれらの振幅も真値に近い値を同定している。推定誤差は l を大きくすれば小さくできるが、異常値検出時点はその分遅れる。また、 $l = 40$ として一般化逆行列を用いた場合は図-5 のように、222 時点において $\hat{\theta} = 181$ が得られ $l = 60$ の場合よりも 20 時点早く異常値を検出し修正を行っている。しかし異常値量の同定はうまくいかず、イノベーションは振幅の修正後 20 ステップ程度で一旦は小さくなっているが、290 時点付近で再び大きくなった。このため再度異常値検出指標が閾値を越し異常値が検出され修正を行ったが、異常値量の推定誤差が大きくこの誤差が補償される前に最終時点に至っているのでイノベーションは相当大きくなっている。以上のように本計算例では μ のランクがフルランクになるまで待つ状態量の修正を行った方が精度のよい結果が得られた。

参考文献 1) 河村 神野 上田他: 適応的フィルタリング法によるスペクトル変化の発生時点およびその大きさの推定について, 土木学会西部支部研究発表会講演概論集, pp. 140~141, 1983年2月
2) 上田 河村 神野: 適応的カルマンフィルターによる異常値検出法について, 土木学会論文集投稿中
3) 例えば 坂和 俊幸: 最適システム制御論, コロナ社, pp. 141~143, 昭49年

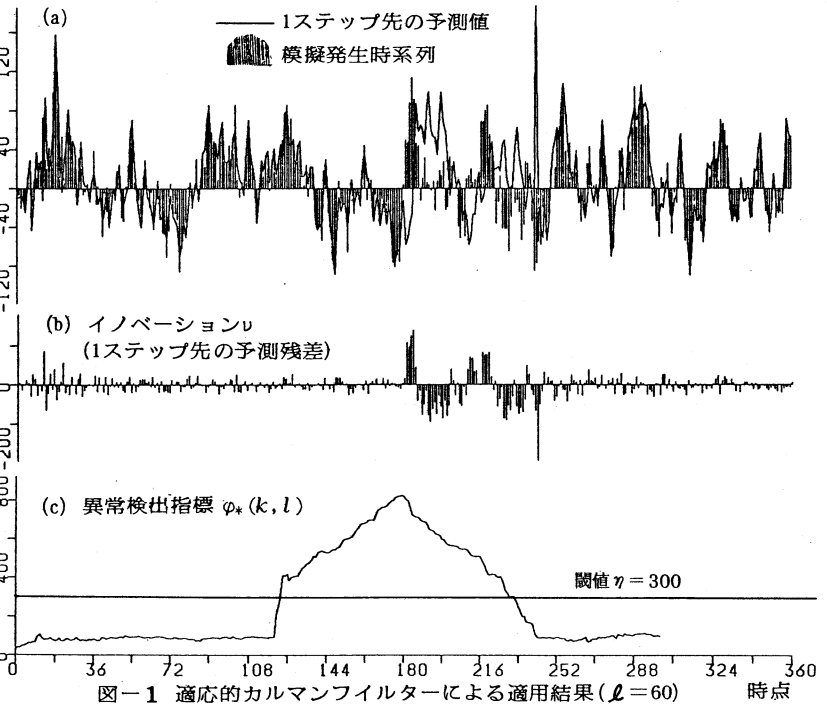


図-1 適応的カルマンフィルターによる適用結果 ($l = 60$)

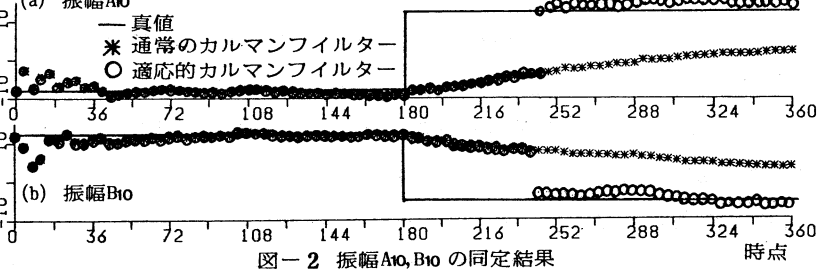


図-2 振幅 A_{10}, B_{10} の同定結果

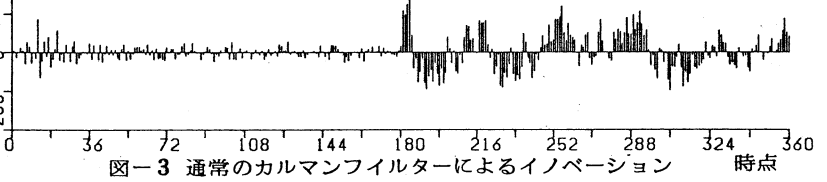


図-3 通常のカルマンフィルターによるイノベーション

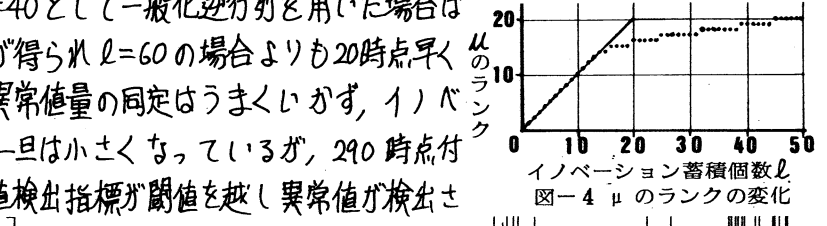


図-4 μ のランクの変化

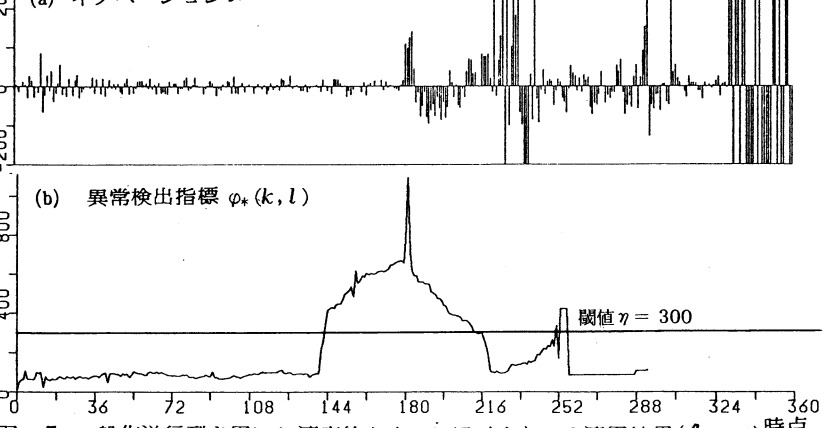


図-5 一般化逆行列を用いた適応的カルマンフィルターの適用結果 ($l = 40$)