

九州大学 学生員 ○河村 明
九州大学 正会員 上田 年比古
九州大学 正会員 神野 健二

1. まえがき 自然現象や生体も含めてより広範なシステムの同定問題を考える場合、システムの特異要素に異常値を含む場合を考慮する必要がしばしばある。本報では、簡単のため単一周期成分より成る時系列を想定し、一定のパターン変動を繰り返す時系列に異常値が発生する場合を模擬発生させる。この異常値を含む時系列に対して、(1) 通常のカルマンフィルターによる方法、(2) 一般化尤度比検定法をカルマンフィルターと融合した形で用いる適応的フィルタリング法による方法の2通りの手法で同定および将来予測を行う。次いでこれらの手法の予測結果等を比較検討し、適応的フィルタリング法の有効性およびその特性を示す。

2. 適応的フィルタリング法について²⁾ この手法は(1)式のようなダイナミクスで表わされるシステムの状態量を推定するのに適用される手法である。(1)式は通常のカルマンフィルターのシステム方程式に異常値項 $\delta_{\theta k} \delta G(k)$ を含んだ形となっている。通常のカルマンフィルターについては参考文献1)等を参照されたい。観測方程式は(2)式で表わされる。 $x(k+1) = \Phi(k)x(k) + \Gamma(k)u(k) + \delta_{\theta k} \delta G(k)$ — (1), $y(k) = H(k)x(k) + w(k)$ — (2) ここで、 k : 時点, $x(k)$: システムの状態ベクトル, $y(k)$: 観測ベクトル, $u(k)$: 平均0で分散 Σ の正規確率変数ベクトル, $w(k)$: 平均0で分散 W の正規確率変数ベクトル, $\Phi(k)$, $\Gamma(k)$: 既知のシステム行列, $H(k)$: 既知の観測行列, $\delta_{\theta k} \delta G(k)$: 未知の独立した異常値項, $\delta G(k)$: 未知の異常値ベクトル, $\delta_{\theta k}$: クロネッカーのデルタである。この手法は一般化尤度比検定法により異常値の有無を検定し、もし異常値が検出されれば、その発生時点およびその大きさを推定し、異常値の大きさに応じてシステムの状態量を修正するものである。異常値検出から修正までの諸式を以下に示す。なおここでは $y(k)$ をスカラーとしている。(1)式は2つの仮説に分けることができる。仮説 H_0 : 異常値 $\delta G(k)$ は生じていない。仮説 H_1 : $k = \theta$ で異常値 $\delta G(k)$ が生じている。仮説 H_0 の下では通常のカルマンフィルターにより状態量を推定する。仮説 H_1 の下では、一般化尤度比検定法より、異常値の発生時点 θ の最尤推定値 $\hat{\theta}$ および $k = \hat{\theta}$ において異常値が発生したときの異常値の大きさ $\delta G(\hat{\theta})$ の最尤推定値 $\hat{\delta G}(\hat{\theta})$ が(3),(4)式より求められる。そして一般化尤度比の大きさにより仮説 H_0 , H_1 のいずれを受容するかの決定を(5)式により行う。すなわち $\phi_*(\hat{\theta}, \ell)$ は異常値発生の有無を判定する指標であって、これがある値 ℓ 以上になると異常値発生とみなすことになる。

$$\hat{\theta} = \max_k \{ \phi'(k, \ell) u^{-1}(k, \ell) \phi(k, \ell) \} \text{ — (3), } \hat{\delta G}(\hat{\theta}) = u^{-1}(\hat{\theta}, \ell) \phi(\hat{\theta}, \ell) \text{ — (4), } \phi_*(\hat{\theta}, \ell) \triangleq \sqrt{\phi'(\hat{\theta}, \ell) u^{-1}(\hat{\theta}, \ell) \phi(\hat{\theta}, \ell)} \oplus \mu_0 \eta \text{ — (5)}$$

$$\phi(k, \ell) \triangleq \sum_{i=1}^{\ell} A_2(k, k+i) v(k+i) / \sigma^2(k+i) \text{ — (6), } \mu(k, \ell) \triangleq \sum_{i=1}^{\ell} A_2(k, k+i) A_2(k, k+i) / \sigma^2(k+i) \text{ — (7), } A_2(k, k+i) \triangleq H(k+i)$$

$$\Psi(k+1, k+i) \text{ — (8), } \Psi(k+1, k+i) \triangleq \Phi(k+i-1) [I - K(k+i-1)H(k+i-1)] \Psi(k+i, k+i-1) \text{ (但し, } \Psi(k+1, k+1) = I) \text{ — (9),}$$

ここで、 $K(k+i-1)$: カルマンゲインマトリックス, $\nu(k+i)$: 1ステップ先の観測値の予測残差, $\sigma^2(k+i)$: $\nu(k+i)$ の分散, ℓ : 検定のために蓄積するデータの個数, ℓ : 検定に用いる閾値, \oplus : 転置, I : 単位行列, \triangleq : 定義である。以上より異常値が検出されると、これに対してフィルターを適応させるために状態推定量を(10)式のように修正し、また $\hat{\delta G}(\hat{\theta})$ の推定の不正確さを補うために、推定誤差共分散行列を(11)式のように修正する。新しく修正されたものに添字 *new*, 修正前のものに添字 *old* を付ける。 $\hat{x}_{new}(\hat{\theta}+i|\hat{\theta}+i) = \hat{x}_{old}(\hat{\theta}+i|\hat{\theta}+i) + \Delta_2(\hat{\theta}, \hat{\theta}+i) \hat{\delta G}(\hat{\theta})$ — (10) $P_{new}(\hat{\theta}+i|\hat{\theta}+i) = P_{old}(\hat{\theta}+i|\hat{\theta}+i) + \Delta_2(\hat{\theta}, \hat{\theta}+i) u^{-1}(\hat{\theta}, \ell) \Delta_2(\hat{\theta}, \hat{\theta}+i)$ — (11), ここで、 $\Delta_2(\hat{\theta}, \hat{\theta}+i) \triangleq [I - K(\hat{\theta}+i)H(\hat{\theta}+i)] \Psi(\hat{\theta}+1, \hat{\theta}+i)$ — (12), なお修正はオフラインで計算できる。

3. 計算例 単一周期成分からなる異常値を含む時系列を(13)式により模擬発生させた。 $y(k) = A \sin 2\pi f k + B \cos 2\pi f k + w(k)$ — (13) . ここで、 k : 時点, A, B : 振幅, f : 周波数成分, $w(k)$: 平均0の正規確率変数である。ここでは、 $f = 1/36$, $w(k)$ は $N(0, 0.5)$ の正規乱数を与え、表-1に示すように、 $k = 72$ で異常が発生したとして、

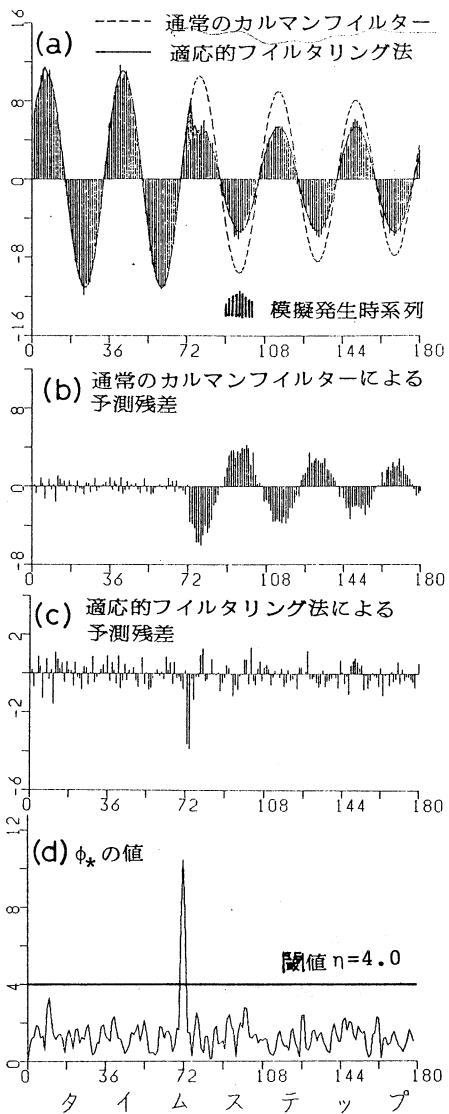


図-1 ケース1の結果

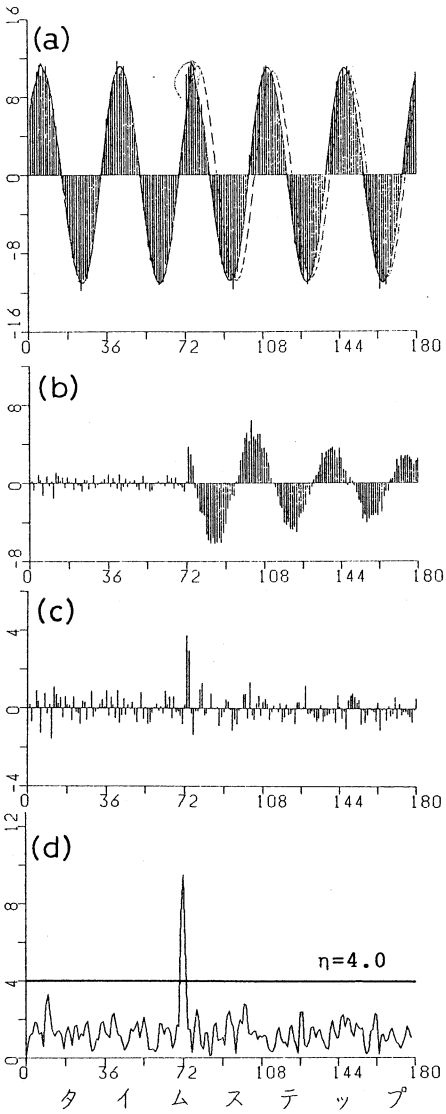


図-2 ケース2の結果

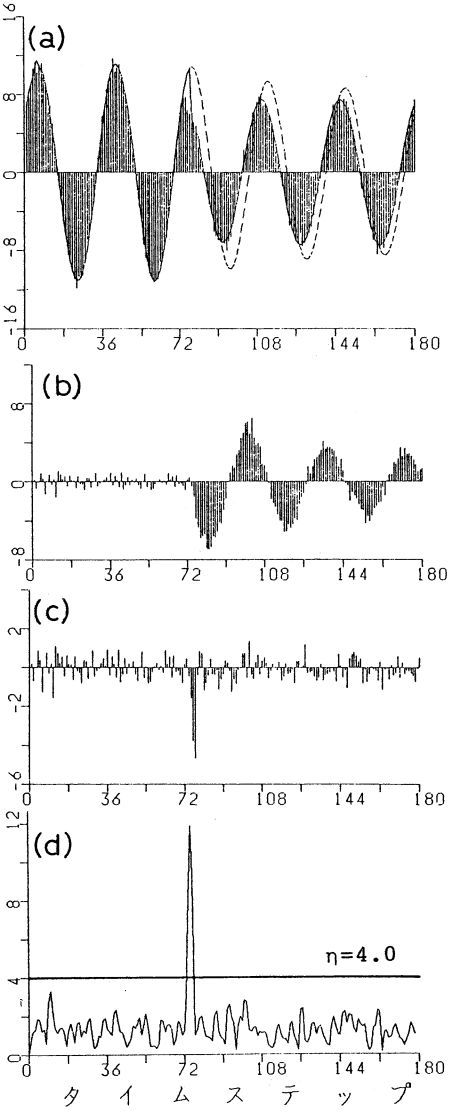


図-3 ケース3の結果

れ > 72 で、ケース1：位相は変わらず振幅だけが変化する場合、ケース2：振幅は変わらず位相だけが変化する場合、ケース3：振幅と位相がともに変化する場合の3つの場合を180ステップ程模擬発生させた。これらの時系列に対して、通常のカルマンフィルタ

と適応的フィルタリング法で1ステップ先を予測した値を図-1~図-3の(a)に示す。図の(b)は通常のカルマンフィルタによる1ステップ先の予測残差、(c)は適応的フィルタリング法による1ステップ先の予測残差、(d)は(5)式における $\phi_x(k, l)$ の値を示している。なお、 $l=2$ 、 $l=4$ として一般化尤度比検定を行った。

4. むすび 以上の計算例の結果より、通常のカルマンフィルタでは異常値にゆっくりとしか追従できず、大きな予測残差を生じているが、適応的フィルタリング法では異常値時系列によく追従しており予測残差も小さくなることわかる。また、 $w(k)$ を変えた計算から次の特性もわかった。①検定のために蓄積するデータ個数 l はシステムバクトルの次元 n 以上に選ばれたいが、 l を大きくすると検出精度は向上するが検出時点がその分遅れる。よってそのトレードオフを考慮して l を決定する必要があるが、雑音レベルが小さければ $l=n$ としても差支えない。②(3)式中の雑音項を大きくすると、(5)式中の $\phi_x(k, l)$ のピークが明確には現われにくくなり異常値を検出することが難しくなる。なお多周期成分より成る異常値時系列および実際の時系列への適用については今後検討してゆくつもりである。

参考文献 1) 有本卓: カルマンフィルタ, 産業図書, 2) A.S. Willky & H.L. Jones: "A Generalized Likelihood Ratio Approach to Detection and Estimation of Jumps in Linear Systems", IEEE Trans. on AC, Vol AC-21 (1976)

表-1 模擬発生に用いたパラメーターの値

式(13)の振幅	時点	$73 \leq k \leq 180$			
		$k \leq 72$	ケース1	ケース2	ケース3
A		10.0	5.0	5.0	3.0
B		5.0	2.5	10.0	7.0