

適応的カルマンフィルターによる異常値検出について

DETECTION OF ABNORMALITY BY THE ADAPTIVE KALMAN FILTER

上田年比古*・河村 明**・神野 健二***

By Toshihiko UEDA, Akira KAWAMURA and Kenji JINNO

In this paper a new and simple method for on-line detection of the time of occurrence of abnormality is proposed. The adaptive Kalman filter (AKF) coupled with a generalized likelihood ratio test is derived incorporating this method for the case of both the unknown abnormal and observed variables being vectors. Each state variable is clearly defined as a function of the unknown abnormal variable. Physical relations among the state variables and among the other variables of the AKF are also formulated. To show its effectiveness, adaptability and ability to detect abnormalities, the derived AKF is applied to a synthetically generated time sequence having an abnormality occurring at an unknown point in the sequence. The proposed method results in a more practical on-line algorithm for the AKF and much less computer loads.

1. ま え が き

各種の装置の作動時、突発的な異常発生によりその動特性が変化した場合、一般にその後の作動状態が異なってくる。たとえば、機械の故障による異常運転や、観測信号に観測妨害が生じて信号が変化する場合など、いずれも動特性の異常変化の結果と考えられる。また自然現象の時系列たとえば気候変動についてもシステムモデルの変化としてとらえた方が現象をよく表現する場合が考えられ、山本義一編「気候変動」¹⁾にみられるアフリカ・セネガルのダカールにおける年降水量の時系列にみられる少雨化傾向あるいは火山の大噴火による気温の低温化などがこれにあたるものと考えられる。

このような場合、どのように配慮を行っても、異常現象に対する理解の不足などから、異常を事前に予測しこれを回避することは困難である。したがって異常発生後、その経済的損失を最小限にとどめるため、なるべくすみやかに、異常の検出を行い、早急に対応策を立てることが望まれる²⁾。

さて現在、線形推定理論の一つとしてのカルマンフィルター理論は、土木工学の分野でも、日野氏³⁾の水文流出予測への適用など、現在一般的な手法になりつつある。しかし、定常な誤差統計値をもつ通常のカルマンフィルターのフィードバック機構では、異常現象への対応が遅く、異常発生以後の予測に大きな誤差を生ずる。またこの場合1ステップ先の予測残差系列(イノベーション系列とよばれている)は正規性白色雑音系列にならず、カルマンフィルターの最適性に関する必要十分条件(Mehra⁴⁾)を満足しなくなる。

これに対して、近年、一般化尤度比検定法をカルマンフィルター理論と融合した形で用いて、システムに異常が生じた場合の異常発生時刻およびその規模を推定するいわゆる適応的カルマンフィルター(Adaptive Kalman Filter, 以下AKFと記す)が電気工学の分野等で盛んになりつつある^{5)~7)}。一般に通常のカルマンフィルター理論ではたとえシステムに異常が発生しても、異常がそのシステム状態量に敏感に表現されるようになっていなくて、システムへの追従が遅いのに対し、この手法は、システムの異常発生が状態量に敏感に表現されるようになっているため追従が敏速に行われる。Kitanidis and Bras⁶⁾は河川の降雨流出をオンラインで予測する場合、洪水時や異常渇水時には、通常時の流出システムに異常

* 正会員 工博 九州大学教授 工学部水工土木学教室
(〒812 福岡市東区箱崎6-10-1)

** 学生会員 工修 九州大学大学院水工土木学専攻(同上)

*** 正会員 工博 九州大学助教授 工学部水工土木学教室
(同上)

を生じ、新たな動特性をもった流出システムに遷移した
ものとして AKF を適用し、予測精度の向上を得ている。
なおこの文献では、観測量と推定すべき異常値がともに
スカラーの場合を取り扱っていて一般的ではない。著者
らは先に、観測量はスカラーで異常値がベクトルの場合
の AKF の手法を示し、その適用例について考察を行っ
た⁸⁾。

本論文は、これをさらに進展させて、観測量、未知の
異常値がともにベクトルで表わされる最も一般的な
AKF についてその中の諸量を異常値の関数として明確
に定義し、これらの関係式の誘導過程を示す。次いで、
この手法の考えを明らかにするとともに、異常発生時点
の新たな検出法を提案し、実際にオンラインでこの
AKF を適用する場合のアルゴリズムを示している。次
に、多周期成分より成る周期関数で表わされる時系列に、
異常が発生する場合を模擬発生させ、これに通常のカル
マンフィルタと本 AKF を適用し、その結果を検討し
て、本手法の適応性、有効性および異常検出性能など
について検討するものである。

2. 通常のカルマンフィルタ^{12),13)}

この手法は、式 (1) のようなダイナミクスで表わさ
れるシステムの状態量 x を推定するのに適用される理
論で、そのシステムの状態量は式 (2) の観測方程式
を通してのみ観測される。

システム方程式：

$$x(k+1) = \Phi(k)x(k) + \Gamma(k)u(k) \dots\dots\dots (1)$$

観測方程式：

$$y(k) = H(k)x(k) + w(k) \dots\dots\dots (2)$$

- k : 時点. なお時点間の間隔はステップとよぶ.
- x : システムの状態量ベクトル (n 次元ベクトル)
- Φ : 既知の状態遷移ベクトル ($n \times n$ 行列)
- Γ : 既知の変換行列 ($n \times p$ 行列)
- u : システム雑音. 平均値 0 で分散 U の独立な正規
性白色雑音 (p 次元ベクトル)
- y : 観測量ベクトル (m 次元ベクトル ($m \leq n$))
- H : 既知の観測行列 ($m \times n$ 行列)
- w : 観測雑音. 平均値 0 で分散 W の独立な正規性
白色雑音 (m 次元ベクトル)

x の最適推定値 \hat{x} は、 $\hat{x}(0|0)$, $P(0|0)$ を初期値として、
式 (3)~(12) を順次計算して得られる。

$$\hat{x}(k+1|k) = \Phi(k)\hat{x}(k|k) \dots\dots\dots (3)$$

$$\hat{y}(k+1|k) = H(k+1)\hat{x}(k+1|k) \dots\dots\dots (4)$$

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1|k) \triangleq x(k+1) - \hat{x}(k+1|k) \\ = \Phi(k)\hat{x}(k|k) + \Gamma(k)u(k) \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(k+1|k) \triangleq E[\hat{x}(k+1|k)\hat{x}^T(k+1|k)] \\ = \Phi(k)P(k|k)\Phi^T(k) + \Gamma(k)U(k)\Gamma^T(k) \end{aligned}$$

$$\dots\dots\dots (6)$$

$$\begin{aligned} v(k+1) \triangleq y(k+1) - \hat{y}(k+1|k) \\ = H(k+1)\hat{x}(k+1|k) + w(k+1) \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(k+1) \triangleq E[v(k+1)v^T(k+1)] \\ = H(k+1)P(k+1|k)H^T(k+1) + W(k+1) \\ \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

$$K(k+1) = P(k+1|k)H^T(k+1)V^{-1}(k+1) \dots\dots\dots (9)$$

$$\hat{x}(k+1|k+1) = \hat{x}(k+1|k) + K(k+1)v(k+1) \dots\dots\dots (10)$$

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1|k+1) \triangleq x(k+1) - \hat{x}(k+1|k+1) = \tilde{x}(k+1|k) - K(k+1)v(k+1) \\ = [I - K(k+1)H(k+1)]\hat{x}(k+1|k) \\ - K(k+1)w(k+1) \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(k+1|k+1) \triangleq E[\hat{x}(k+1|k+1)\hat{x}^T(k+1|k+1)] \\ = [I - K(k+1)H(k+1)]P(k+1|k) \\ \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

ここに、

- $x(k+1)$: 時点 ($k+1$) の真値
- $\hat{x}(k+1|k)$: 時点 k までの観測量による $x(k+1)$
の最適推定値
- $\hat{x}(k+1|k+1)$: 時点 ($k+1$) までの観測量による
 $x(k+1)$ の最適推定値
- $\hat{y}(k+1|k)$: 時点 k までの観測量による $y(k+1)$
の最適推定値
- $K(k+1)$: カルマンゲインマトリックス ($n \times m$
行列)
- $v(k+1)$: 1 ステップ先の観測量の予測残差 (イ
ノベーションとよばれる) (n 次元ベ
クトル)
- $U(k)$: システム雑音の共分散行列 ($p \times p$ 行
列)
- $W(k)$: 観測雑音の共分散行列 ($m \times m$ 行列)
- T : 転置記号
- I : 単位行列 (ここでは $n \times n$ 行列)
- \triangleq : 定義, $E[\]$: 期待値演算

3. 適応的カルマンフィルタ (AKF)^{5),7)}

(1) 概 説

これはイノベーションの変動の状況から、状態量の異
常発生の有無を一般化尤度比検定法により検定し、もし
異常発生と判定されれば、発生時点 θ と異常値 $G(\theta)$
を推定し、判定時点において状態量とその推定誤差共
分散行列の修正を行うものである。なお異常発生の間隔は
本法の適用精度のうえからは、状態量を修正し観測量へ
の追従がほぼ安定化する時間間隔が必要と考えられる。

さて AKF のシステム方程式は式 (13) で表わされ、
これは通常のカルマンフィルタのシステム方程式 (1)
に時点 $k = \theta$ で異常値 $G(\theta)$ が加わることを示してい
る。観測方程式は、通常のカルマンフィルタの式 (2)

と同じである。

システム方程式：

$$x(k+1) = \Phi(k)x(k) + \Gamma(k)u(k) + \delta_{k\theta}G(k) \dots (13)$$

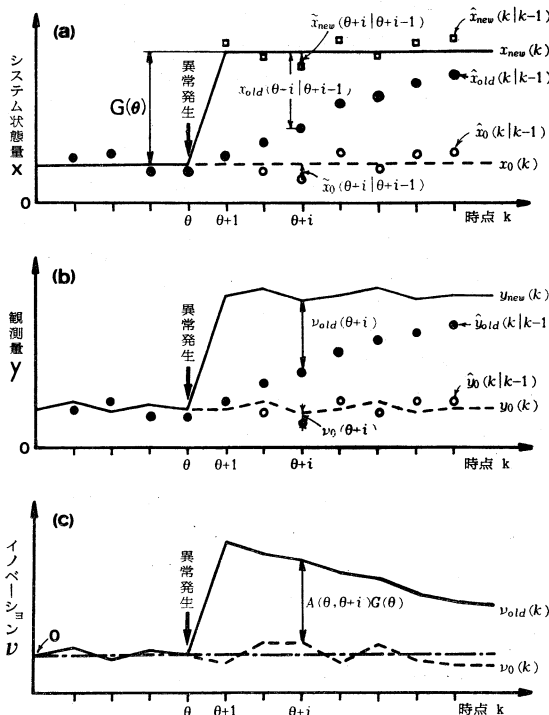
$G(k)$ ：時点 k の異常値ベクトル (n 次元ベクトル)

θ ：異常発生時点

$\delta_{k\theta}$ ：クロネッカーのデルタ ($k=\theta$ で 1, $k \neq \theta$ で 0)

(2) 異常発生による諸量の変化

図一(a), (b), (c) はベクトル x, y, v の, ある 1 つの要素についての模式図である。ここでは, 時点 θ で, 状態量に異常値 $G(\theta)$ が発生した場合を添字 *new*, 異常が発生しなかった場合を添字 0 で示している。ここで \hat{x}_{new} は, 仮に異常発生時点と異常値がわかっていたとして, 時点 θ で, この状態量の修正を行った場合の推定値である。添字 *old* は, 異常発生したが, これに気付かずに, そのまま x_{new}, y_{new} の値に対して, 通常のカルマンフィルタにより計算を続行して得られる値である。図一(a) に示すように, \hat{x}_{old} は漸次 x_{new} に近づいてゆくが, この時間が長くかかることが問題となり, AKF が提案されたといえる。次に, 状態量の真値 x_{new} は式 (13), 図一(a) に示すように時点 $(\theta+1)$ で $G(\theta)$ の変化をし, その後は $G(\theta)$ は加わらず, 式 (1) に従う。この x_{new} の変化に応じて, y_{new}, v_{old} も時点 $(\theta+1)$ で大きく変化する。なお図一(a) では式 (1), (13)



図一 異常発生によるシステム状態量, 観測量, イノベーションの模式図

の Φ が単位行列, システム雑音 u が 0 の場合を示して、 x_{new} と x_0 は平行となる。図一(c) で $v_{old}(k) = y_{new}(k) - \hat{y}_{old}(k|k-1)$, $v_0(k) = y_0(k) - \hat{y}(k|k-1)$ で, $v_{old}(k)$ は時点 $(\theta+1)$ で急増し, それ以後漸減する傾向にある。

さて異常発生後の時点 $(\theta+i)$ での諸量はシステムの線形性より, 次のように異常発生がなかった場合の項と, 異常発生による変化分を示す項とに分離できる (添字は前述の定義に従う)。

$$x_{new}(\theta+i) = x_0(\theta+i) + \Phi^*(\theta, \theta+i)G(\theta) \dots (14)$$

$$y_{new}(\theta+i) = y_0(\theta+i) + H(\theta+i)\Phi^*(\theta, \theta+i)G(\theta) \dots (15)$$

$$\hat{x}_{old}(\theta+i|\theta+i-1) = \hat{x}_0(\theta+i|\theta+i-1) + \Psi(\theta, \theta+i)G(\theta) \dots (16)$$

$$\hat{x}_{old}(\theta+i|\theta+i) = \hat{x}_0(\theta+i|\theta+i) + \Delta(\theta, \theta+i)G(\theta) \dots (17)$$

$$\hat{x}_{old}(\theta+i|\theta+i-1) = \hat{x}_0(\theta+i|\theta+i-1) + [\Phi^*(\theta, \theta+i) - \Psi(\theta, \theta+i)]G(\theta) \dots (18)$$

$$\hat{x}_{old}(\theta+i|\theta+i) = \hat{x}_0(\theta+i|\theta+i) + [\Phi^*(\theta, \theta+i) - \Delta(\theta, \theta+i)]G(\theta) \dots (19)$$

$$v_{old}(\theta+i) = v_0(\theta+i) + A(\theta, \theta+i)G(\theta) \dots (20)$$

ここに,

$$\Phi^*(\theta, \theta+i) \triangleq \begin{cases} \prod_{t=\theta}^{\theta+i-1} \Phi(\theta+i-1) & i \geq 2 \\ I & i = 1 \\ 0 & i \leq 0 \end{cases} \quad (i \text{ は } i \text{ から } 2 \text{ に減少}) \quad (n \times n \text{ 行列}) \dots (21)$$

$$\Psi(\theta, \theta+i) \triangleq \begin{cases} \prod_{t=\theta}^{\theta+i-1} \Phi(\theta+i-1)[I - K(\theta+i-1) \cdot H(\theta+i-1)] & i \geq 2 \\ I & i = 1 \\ 0 & i \leq 0 \end{cases} \quad (i \text{ は } i \text{ から } 2 \text{ に減少}) \quad (n \times n \text{ 行列}) \dots (22)$$

$$A(\theta, \theta+i) \triangleq H(\theta+i)\Psi(\theta, \theta+i) \dots (23)$$

$$\Delta(\theta, \theta+i) \triangleq [I - K(\theta+i)H(\theta+i)]\Psi(\theta, \theta+i) \dots (24)$$

以下これらの式を式 (1)~(13) を用いて誘導するが, まず各添字についての式 (3)~(12) の関係式を考えてみる。システム方程式は, 式 (13) のように異常発生時点 $k=\theta$ で $G(\theta)$ が加わるが, それ以外は式 (1) と同じで, また観測方程式は異常発生時点でも発生前と同じである。したがって θ 以前および $(\theta+1)$ を過ぎて後の区間では式 (1) と式 (2) による通常のカルマンフィルタで計算してゆくの、この区間では式 (1)~(12) はすべての添字で成立する。よって θ と $\theta+1$

の時点について、式(1)~(12)が成立しない場合を検討すると以下のようである。

$$x_{new}(\theta+1) = \Phi(\theta)x_{new}(\theta) + \Gamma(\theta)u(\theta) + G(\theta) \dots\dots\dots(25)$$

$$\hat{x}_{new}(\theta+1|\theta) = \Phi(\theta)\hat{x}_{new}(\theta|\theta) + G(\theta) \dots\dots\dots(26)$$

$$\hat{x}_{old}(\theta+1|\theta) = \Phi(\theta)\hat{x}_{old}(\theta|\theta) + \Gamma(\theta)u(\theta) + G(\theta) \dots\dots\dots(27)$$

$$P_{old}(\theta+1|\theta) = \Phi(\theta)P(\theta|\theta)\Phi^T(\theta) + \Gamma(\theta)U(\theta)\Gamma^T(\theta) + G(\theta)G^T(\theta) \dots\dots\dots(28)$$

なお式(28)は \hat{x}_{old} の算定過程で用いるべきものであるが、 \hat{x}_{old} の計算では真値には異常発生はないと考えて計算するので、式(28)の $G(\theta)G^T(\theta)$ は実際には存在していても、計算上ではないとするので、 \hat{x}_{old} の計算の推定誤差共分散行列は式(6)による P_0 を用いることになる。

なお時点 θ までは、異常発生前のため、添字 $0, old, new$ の各値は一致する。

まず式(14)を誘導する。 $i \leq 0$ で

$$x_{new}(\theta+i) - x_0(\theta+i) = 0 \dots\dots\dots(29)$$

次に式(13)から式(1)の添字 0 の場合を差し引くと

$$x_{new}(\theta+1) - x_0(\theta+1) = \Phi(\theta)[x_{new}(\theta) - x_0(\theta)] + G(\theta) = G(\theta) \dots\dots\dots(30)$$

一般に時点 $(\theta+i)$ では

$$\begin{aligned} x_{new}(\theta+i) - x_0(\theta+i) &= \Phi(\theta+i-1)[x_{new}(\theta+i-1) - x_0(\theta+i-1)] \\ &= \Phi(\theta+i-1)\Phi(\theta+i-2)\dots\Phi(\theta+1)G(\theta) \dots\dots\dots(31) \end{aligned}$$

よって式(29), (30), (31)より式(21)の表示を用いれば式(14)が得られる。ここでは、 $i \leq 0$ は考えなくてよいが、式(21)の規約をしておけば、 $i \leq 0$ でも式(14)は成立する。

次に式(15)は式(2)の時点 $(\theta+i)$ での添字 new から添字 0 の場合を差し引き式(14)を考慮すれば得られる。

次に式(16)を誘導する。時点 θ までは異常の影響は現われないので、

$$\hat{x}_{old}(\theta|\theta) - \hat{x}_0(\theta|\theta) = 0 \dots\dots\dots(32)$$

$i=1$ では式(27)から式(5)の添字 0 の場合を差し引き

$$\hat{x}_{old}(\theta+1|\theta) - \hat{x}_0(\theta+1|\theta) = G(\theta) \dots\dots\dots(33)$$

次に $i > 1$ では式(5)の時点 $(\theta+i)$ における添字 old から添字 0 の場合を差し引いて

$$\begin{aligned} \hat{x}_{old}(\theta+i|\theta+i-1) - \hat{x}_0(\theta+i|\theta+i-1) &= \Phi(\theta+i-1)[\hat{x}_{old}(\theta+i-1|\theta+i-1) \\ &\quad - \hat{x}_0(\theta+i-1|\theta+i-1)] \dots\dots\dots(34) \end{aligned}$$

また式(11)の時点 $(\theta+i-1)$ での添字 old から添字 0 の場合を差し引いて

$$\begin{aligned} \hat{x}_{old}(\theta+i-1|\theta+i-1) - \hat{x}_0(\theta+i-1|\theta+i-1) &= [I - K(\theta+i-1)H(\theta+i-1)] \\ &\quad \cdot [\hat{x}_{old}(\theta+i-1|\theta+i-2) - \hat{x}_0(\theta+i-1|\theta+i-2)] \dots\dots\dots(35) \end{aligned}$$

式(34)に式(35)を代入すると

$$\begin{aligned} \hat{x}_{old}(\theta+i|\theta+i-1) - \hat{x}_0(\theta+i|\theta+i-1) &= \Phi(\theta+i-1)[I - K(\theta+i-1)H(\theta+i-1)] \\ &\quad \cdot [\hat{x}_{old}(\theta+i-1|\theta+i-2) - \hat{x}_0(\theta+i-1|\theta+i-2)] \dots\dots\dots(36) \end{aligned}$$

式(36)の漸化式と式(33)と式(32)を考慮すれば、式(22)の表示を用いて、式(16)を得る。

式(17)は式(16)を用いると式(35)より得られる。また式(18)は、 $\hat{x}(\theta+i|\theta+i-1) = x(\theta+i) - \hat{x}(\theta+i|\theta+i-1)$ であることから、式(14)~式(16)より得られる。同様に式(19)は、式(14)~式(17)より得られる。次に式(20)は式(7)の時点 $(\theta+i)$ での添字 old から添字 0 の場合を差し引き、式(16)を用いれば導かれる。

次にイノベーションベクトルの期待値をとると、

$$\begin{aligned} E[\nu_0(\theta+i)] &= E[y_0(\theta+i) - \hat{y}_0(\theta+i|\theta+i-1)] \\ &= E[H(\theta+i)x_0(\theta+i) - \hat{x}_0(\theta+i|\theta+i-1)] = 0 \dots\dots\dots(37) \end{aligned}$$

したがって式(20)より

$$E[\nu_{old}(\theta+i)] = A(\theta, \theta+i)G(\theta) \dots\dots\dots(38)$$

式(20), (38)より $\nu_{old}(\theta+i) - E[\nu_{old}(\theta+i)] = \nu_0(\theta+i)$ であるので $E[\nu_0(\theta+i)] = 0$ を加味すると

$$\begin{aligned} Cov[\nu_{old}(\theta+i)] &\triangleq E[(\nu_{old}(\theta+i) - E[\nu_{old}(\theta+i)]) \\ &\quad \cdot (\nu_{old}(\theta+i) - E[\nu_{old}(\theta+i)])^T] \\ &= E[\nu_0(\theta+i)\nu_0^T(\theta+i)] \\ &= Cov[\nu_0(\theta+i)] = V(\theta+i) \dots\dots\dots(39) \end{aligned}$$

すなわち時点 θ で $G(\theta)$ の異常値が発生した場合の時点 $(\theta+i)$ のイノベーションの期待値は異常値が発生しなかった場合の期待値(0である)より $A(\theta, \theta+i)G(\theta)$ だけ大きく、またその共分散は両者で同じである。

(3) 一般化尤度比検定

いま、異常値が発生していないとする場合を仮説 H_0 、 $k=\theta$ で状態量に異常値 $G(\theta)$ が発生したとする場合を仮説 H_1 として検討を進める。 $\nu(\theta+i)$ は正規分布をなす $u, w, x(0)$ の線形関数であるから、仮説 H_0, H_1 のいずれのもとでも m 次元の多変量正規分布を成している。そしてこれらの平均値と共分散は式(37)~(39)である。よって、異常発生時点以後の l 個のイノベーションが、それぞれの仮説のもとで同時に生起する同時確率密度関数は、 $\nu(\theta+i)|i=1, 2, \dots, l$ が互いに独立であることから次式のように表わされる。

$$\begin{aligned} p(\nu(\theta+1), \dots, \nu(\theta+l)|H_0) &= \prod_{i=1}^l \frac{1}{(2\pi)^{m/2} |V|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \nu^T V^{-1} \nu\right] \dots\dots\dots(40) \end{aligned}$$

$$p(\nu(\theta+1), \dots, \nu(\theta+l) | H_1) = \prod_{i=1}^l \frac{1}{(2\pi)^{m/2} |V|^{1/2}} \cdot \exp \left[-\frac{1}{2} [\nu - AG]^T V^{-1} [\nu - AG] \right] \dots (41)$$

ここに、 $| \quad |$ は行列式で、 $\nu = \nu(\theta+i)$, $V = V(\theta+i)$, $A = A(\theta, \theta+i)$, $G = G(\theta)$ の意味である。よって、仮説 H_0 と仮説 H_1 でのイノベーション系列の尤度比 $\Lambda(\theta, G(\theta), l)$ は、式 (40) と式 (41) の比として次式となる。

$$\Lambda(\theta, G(\theta), l) \triangleq \frac{p(\nu(\theta+1), \dots, \nu(\theta+l) | H_1)}{p(\nu(\theta+1), \dots, \nu(\theta+l) | H_0)} \dots (42)$$

したがって式 (40), (41) より

$$\begin{aligned} \Lambda(\theta, G(\theta), l) &= \exp \sum_{i=1}^l \left[-\frac{1}{2} (\nu - AG)^T V^{-1} (\nu - AG) + \frac{1}{2} \nu^T V^{-1} \nu \right] \\ &= \exp \left[\frac{1}{2} G^T \sum_{i=1}^l (A^T V^{-1} \nu) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l (\nu^T V^{-1} A) G \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} G^T \sum_{i=1}^l (A^T V^{-1} A) G \right] \dots (43) \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} \phi(\theta, l) &\triangleq \sum_{i=1}^l A^T V^{-1} \nu \\ &\equiv \sum_{i=1}^l A^T(\theta, \theta+i) V^{-1}(\theta+i) \nu(\theta+i) \\ &\quad \dots (n \text{次元ベクトル}) \dots (44) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu(\theta, l) &\triangleq \sum_{i=1}^l A^T V^{-1} A \\ &\equiv \sum_{i=1}^l A^T(\theta, \theta+i) V^{-1}(\theta+i) A(\theta, \theta+i) \\ &\quad \dots (n \times n \text{の正定値行列}) \dots (45) \end{aligned}$$

とおき、 $\phi(\theta, l) = \phi$, $\mu(\theta, l) = \mu$ と略記して

$$G^T \phi = \phi^T G \quad (\text{スカラーのため転置しても値は同じ}) \dots (46)$$

を考慮すれば、尤度比は次式となる。

$$\Lambda(\theta, G(\theta), l) = \exp \{ \phi^T(\theta, l) G(\theta) - (1/2) G^T(\theta) \mu(\theta, l) G(\theta) \} \dots (47)$$

この尤度比を最大にする異常値 $G(\theta)$ の大きさがその最尤推定値 $\hat{G}(\theta)$ である。これは、式 (47) の対数をとって、 $G(\theta)$ で微分して 0 とおいて得られる。すなわち

$$\hat{G}(\theta) = \mu^{-1}(\theta, l) \phi(\theta, l) \dots (48)$$

この \hat{G} を用いた尤度比 $\Lambda(\theta, \hat{G}(\theta), l)$ は一般化尤度比と定義され、次式となる。

$$\Lambda(\theta, \hat{G}(\theta), l) = \exp \{ \phi^T \hat{G} - (1/2) \hat{G}^T \mu \hat{G} \} \dots (49)$$

式 (48) から

$$\phi = \mu \hat{G}, \quad \phi^T = \hat{G}^T \mu^T = \hat{G}^T \mu \quad (\mu \text{ は正定値行列}) \dots (50)$$

$$\begin{aligned} \therefore \Lambda(\theta, \hat{G}(\theta), l) &= \exp \{ (1/2) \hat{G}^T \mu \hat{G} \} \\ &= \exp \{ (1/2) \phi^T(\theta, l) \mu^{-1}(\theta, l) \phi(\theta, l) \} \dots (51) \end{aligned}$$

なお、 $\ln[\Lambda(\theta, \hat{G}(\theta), l)]$ が最大値である証明は次のようである。いま $G = \hat{G} + g$ とおくと、式 (47) より

$$\begin{aligned} \ln[\Lambda(\theta, (\hat{G} + g), l)] &= \phi^T(\hat{G} + g) - (1/2)(\hat{G} + g)^T \mu(\hat{G} + g) \\ \text{ここで } \hat{G} &\text{ は式 (48), } \mu \text{ は正定値行列であるから,} \\ [\mu^{-1}]^T &= [\mu^T]^{-1} = \mu^{-1}, \quad g^T \phi \text{ はスカラーのためその転置も} \\ \text{値は同じで } &g^T \phi = \phi^T g, \text{ これらを考慮すれば, 式 (50)} \\ &\text{より} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln[\Lambda(\theta, (\hat{G} + g), l)] &= (1/2) \phi^T \mu^{-1} \phi - (1/2) g^T \mu g \\ &= \ln[\Lambda(\theta, \hat{G}(\theta), l)] - (1/2) g^T \mu g \\ &\quad \dots (52) \end{aligned}$$

μ は正定値行列、 g は 0 でないベクトルであるから、常に $g^T \mu g > 0$ である。よって一般化尤度比 $\Lambda(\theta, \hat{G}(\theta), l)$ は尤度比 $\Lambda(\theta, G(\theta), l)$ の最大値といえる。

さて式 (51) の一般化尤度比 (スカラー) の大きさにより仮説 H_0 , H_1 のいずれを受容するかを決定するのが一般化尤度比検定である。すなわち式 (51) がある値 (閾値) よりも大きければ仮説 H_1 を受容し、小さければ仮説 H_0 を受容する。ここでは次式で定義される $\phi_*(\theta, l)$ (スカラーで、異常検出指標とよぶことにする) と閾値 η の大小を比較し異常発生の有無を検定する。

$$\begin{aligned} \phi_*(\theta, l) &\triangleq \sqrt{2 \ln \Lambda(\theta, \hat{G}(\theta), l)} \\ &= \sqrt{\phi^T(\theta, l) \mu^{-1}(\theta, l) \phi(\theta, l)} \dots (53) \end{aligned}$$

$$\phi_*(\theta, l) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \eta \dots (54)$$

ここに、 η (閾値) : 異常値、雑音の大きさなどを考慮して任意に選べる定数

次に式 (48), (53) の $\mu^{-1}(\theta, l)$ は、行列 $\mu(n \times n$ 行列) のランクがフルランクの n のとき計算可能となる。したがって μ の計算式 (45) で、加算される各項の行列 $(A^T V^{-1} A)$ ($n \times n$ 行列) のランクが $m (\leq n)$ であるので、 $A^T V^{-1} A$ を式 (45) のように加えてゆき、 μ のランクをフルランクになるまで上昇させねばならない。ここでフルランクになるまで加算する個数を l_{min} (最小のデータ蓄積個数) とすれば、 l はこの l_{min} 以上にとらなければならない。たとえば観測量ベクトルの次元 $m=1$ の場合、通常 $l_{min}=n$ である。

上述のことは、 θ で異常が発生したとして、それが正しいかどうかの検定法を示したものである。

次に異常発生時点 θ の最尤推定値 $\hat{\theta}$ は、一般化尤度比を最大にする時点 k として得られる。すなわち

$$\hat{\theta} = |k| \max \Lambda(k, \hat{G}(k), l) = |k| \max \phi_*(k, l) \dots (55)$$

したがって、この式で求められる $\hat{\theta}$ を式 (54) の θ に用いて、一般化尤度比検定を行い、異常発生時点と異常値の最尤推定値を決定することになる。

ここで、ある尤度比が得られた場合の $G(\theta)$ の分布形を求めておく。式 (47), (51) より、

$$\frac{\Lambda(\theta, G(\theta), l)}{\Lambda(\theta, \hat{G}(\theta), l)} = \exp \left\{ \phi^T G - \frac{1}{2} G^T \mu G - \frac{1}{2} \hat{G}^T \mu \hat{G} \right\} \dots\dots\dots(56)$$

式 (46), (50) を用いれば,

$$\phi^T G = (1/2)(\phi^T G + G^T \phi) = (1/2)(\hat{G}^T \mu G + G^T \mu \hat{G}) \dots\dots\dots(57)$$

$$\frac{\Lambda(\theta, G(\theta), l)}{\Lambda(\theta, \hat{G}(\theta), l)} = \exp \left\{ -\frac{1}{2} [(G - \hat{G})^T \mu (G - \hat{G})] \right\} \dots\dots\dots(58)$$

これより, $G(\theta)$ は平均値 \hat{G} , 共分散 μ^{-1} の n 次元多変量正規分布であるといえる. すなわち

$$E[G(\theta)] = \hat{G}(\theta) = \mu^{-1}(\theta, l)\phi(\theta, l) \dots\dots\dots(59)$$

$$Cov[G(\theta)] = \mu^{-1}(\theta, l) \dots\dots\dots(60)$$

(4) 異常発生時点 θ の推定法

図一2(a)の ν 曲線は図一1(c)の ν_{oid} の曲線であるが, ここでは通常現われるような増減を繰り返すやや複雑な形状としている. 次に, 時点の記号を, 図一2(a)に示すように, 現時点を j で表わし, j に対して ϕ_* が算定される時点 k で表わす.

さて異常発生時点の最尤推定値 $\hat{\theta}$ は, 式 (55) のように, 異常検出指標 $\phi_*(k, l)$ の最大の時点として求められる. これは従来, 次のようにして行われている. 図一2(a)について, 現時点 j において, それ以前のある時点 k_1 の ϕ_* は k_1+1 から j までの各時点の ν (個数 l) を用いて, 式 (53) により算定される. この ϕ_* が時点 k_1 の白丸印のように記される. ここに l は ν の蓄積個数であり, k の時点により変化する. こうして, $k_2, k_3, \dots, k_i = (j-N)$ ($N \geq$ 前述の l_{min}) の ϕ_* が図の白丸印のように求められる. 同様にして, θ 以後のある時点 j' に対する k_1, k_2, \dots の ϕ_* が黒丸印のように得られる. したがって, このように j を進行させながら, そ

の都度 ϕ_* 図を求め, その最大の時点が固定するのを確かめて, その最大時点を $\hat{\theta}$ とする. しかしこの方法では, j の進行につれて, 各時点 k の ϕ_* をその都度改めて計算し直さなければならず, l も大きくなり, また求めるべき ϕ_* の個数も増大してゆく. このことから通常は現時点 j に対して求めるべき $\phi_*(k_i, l)$ を

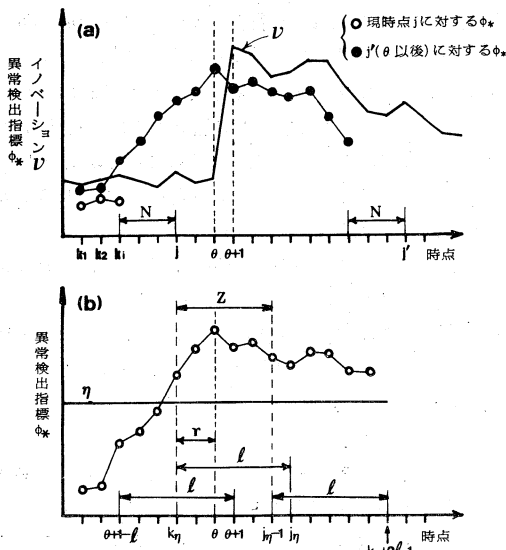
$$j - s_2 \leq k_i \leq j - s_1 (s_2 - s_1 = S > 0, s_1 \geq l_{min}) \dots\dots\dots(61)$$

のある有限のデータ幅 S に固定し, $(j - s_2)$ より前の時点の ϕ_* の計算を j の進行につれておとしてゆきながら, 各 j に対する S 内の ϕ_* をその都度算定して, その最大時点を求め, この時点が固定するのを確かめて, その最大時点を $\hat{\theta}$ とする方法がとられている^{5)~7)}. なおこの方法でも S 内の ϕ_* は, 時点 j の進行とともに改めて計算し直さなければならず, やはりかなりの計算量を必要とする.

本論文では, ϕ_* の計算を, l を一定値にとって行う手法を提案する. すなわち時点 j に対して, ϕ_* 算定の時点 $j-l$ の 1 時点とし, j を進めてゆくにつれ, 順次時点 $j_i - l = k_i$ の ϕ_* を求めることにする. 図一2(b)は以上のようにして得られた ϕ_* 図とする. このように, l を固定して ϕ_* を求める場合, 過去に求められている ϕ_* には現時点の最新情報は加わらない. しかし, 同時確率密度関数の式 (40), (41) の l は, 異常発生時点以後のイノベーションの個数であって, これは任意でよく, この中に必ずしも現時点のイノベーション (最新情報) が含まれている必要はない. また式 (42), 式 (51) は式 (40), (41) の比であるから, その期待値は l に無関係である. なお, Kitanidis and Bras は異常値がスカラーの場合について ϕ_* の分布が l に無関係であることを示している⁹⁾. よって, 式 (51) を用いた式 (53) で定義される ϕ_* の値は, l が何であってもまたこの l の中に最新情報が含まれていなくても, 統計的には変わらないので, 上記の l を固定することが許容される. これ以後は, 従来の方法と同様にここで得られる ϕ_* の最大時点を $\hat{\theta}$ とする. 以上のように, l を固定して ϕ_* を求める方法は, 現時点 j で計算する ϕ_* は 1 個だけで, 従来の方法のように, j の進行に伴い, 同じ時点の ϕ_* を繰り返し計算する必要がなく, 著しく計算が簡易化されるものと考ええる.

次にこの ϕ_* をオンラインで順次算出しながら, その最大時点を求める場合を考える. 一般に ν はかなり変動するため, l がそれほど大きくない場合は, ϕ_* は 2 つ以上の山をもって変動する曲線となり, オンラインで ϕ_* の最大を求めようとするとき, どこまで行っても, さらにその後に ϕ_* の最大が現われる可能性があり, ϕ_* 最大の判定を下すことが困難になる.

この難点を除くため, ここではまず異常発生時点が存



図一2 異常発生時点推定の説明図

在する範囲を考えてみよう。いま図-2(b)のように、 j_n で算定された k_n での ϕ_* が η を越えたとすれば、 k_n から j_n-1 までの間(図-2(b)のZ[l-1ステップ]の範囲)に異常発生時点が存在するといえる。なぜならば、 k_n の ϕ_* 算定に用いられた k_n+1 から j_n までの ν により異常発生の判定が下されたことから、これらの ν の中に異常発生に起因する ν が含まれていると考えられるからである。以上の考察から、ここでは θ の推定法として、この k_n から j_n-1 までの間で ϕ_* の最大を求め、これを $\hat{\theta}$ とする方法を提示する。すなわちオンラインによる計算では、図-2(b)に示すように、 ϕ_* が η を越えた時点 k_n から以後について、順次新たに算定される $\phi_*(\phi_{*now}$ と記す)を、この ϕ_* の時点から k_n までの間の ϕ_* の最大(ϕ_{*max} と記す)と比較して、大きい方を残しながら計算を進め時点 $j_n-1=k_n+l-1$ で得られる ϕ_{*max} に対する時点を異常発生時点とする。この場合、異常発生時点を判定する現時点は $j_n-1+l=k_n+2l-1$ であり、 k_n が異常発生時点より r ステップ($0 \leq r \leq l-1$)手前で生じたとすれば、 $k_n=\theta-r$ となり、判定の現時点は $(\theta+2l-1-r)$ となる。すなわち異常発生時点より $(2l-1-r)$ ステップ後になる。したがって判定の現時点は l が小くなるほど早くなる。

ここで l について考えると、上述のように異常発生の判定時点を早くするには、 l は小さい方がよい。しかし l は前述のように μ の逆行列計算に必要な l_{min} 以上にとる必要がある。また l があまりに小さくなると、雑音の影響を受けて ϕ_* の変動が大きくなり、 ϕ_* 最大が $\hat{\theta}$ と一致しない場合が生じる。したがって、異常値検出の精度を向上させるために l はあまり小さくすることはできない。 l はこれらのことを考慮して決める必要がある。

以上、ここで提案する異常発生時点の推定法を要約すれば、 l を固定する方法で ϕ_* を求めてゆき、これが η を越えた時点 k_n から $(l-1)$ ステップの間での ϕ_* の最大を求め、この時点を異常発生時点と推定する方法である。この方法は、従来の方法に比べ、計算量を著しく軽減できるとともに、 l がある程度小さくて、 ϕ_* の変動が大きい場合でも、異常発生時点を確実に判定することができ、またオンラインの算定にも有利と考えられる。

(5) 状態推定量とその推定誤差共分散行列の修正

図-1(a)のように異常発生後の時点 $(\theta+i)$ までは、異常発生の判定がつかずに、通常のカルマンフィルタにより推定値 \hat{x}_{old} の計算を続行し、異常発生の判定時点で修正して、 \hat{x}_{new} の値に移行させることになる。式(3)~(12)の計算アルゴリズムは、 $x(k|k)$ から出発し、 $x(k+1|k+1)$ を算定して、一つの時間ステップを終了するので、ここでは、この計算ルートに乗せやすいように、 $\hat{x}_{old}(\theta+i|\theta+i)$ から $\hat{x}_{new}(\theta+i|\theta+i)$

に移行する場合の修正式を誘導しよう。

式(11)に式(5)を代入すると

$$\hat{x}(k+1|k+1) = [I - K(k+1)H(k+1)]\{\Phi(k)\hat{x}(k|k) + \Gamma(k)u(k)\} - K(k+1)u(k+1) \dots \dots \dots (62)$$

これは \hat{x}_{new} , \hat{x}_0 いずれでも成立するから、時点 $k=\theta+i-1$ について考えると

$$\hat{x}_{new}(\theta+i|\theta+i) - \hat{x}_0(\theta+i|\theta+i) = [I - K(\theta+i)H(\theta+i)]\Phi(\theta+i-1) \cdot [\hat{x}_{new}(\theta+i-1|\theta+i-1) - \hat{x}_0(\theta+i-1|\theta+i-1)] \dots \dots \dots (63)$$

式(63)はすべての i で成立する。また、

$$\hat{x}_{new}(\theta|\theta) - \hat{x}_0(\theta|\theta) = 0 \dots \dots \dots (64)$$

したがって、式(63)の漸化式で、 i を下げてゆき、式(64)を用いれば、

$$\hat{x}_{new}(\theta+i|\theta+i) - \hat{x}_0(\theta+i|\theta+i) = 0 \dots \dots \dots (65)$$

次に式(14)~式(65)より、

$$\hat{x}_{new}(\theta+i|\theta+i) - \hat{x}_0(\theta+i|\theta+i) = \Phi^*(\theta, \theta+i)G(\theta) \dots \dots \dots (66)$$

したがって、式(66)~式(19)より次式が得られる。

$$\hat{x}_{new}(\theta+i|\theta+i) - \hat{x}_{old}(\theta+i|\theta+i) = \Delta(\theta, \theta+i)G(\theta) \dots \dots \dots (67)$$

ここで式(67)の計算で真値 $G(\theta)$ は未知であるので $G(\theta)$ にはその最尤推定値 $\hat{G}(\theta)$ を用いる。いまこのときの \hat{x}_{new} を \hat{x}_{new} とすれば、修正式は次のようになる。

$$\hat{x}_{new}(\theta+i|\theta+i) - \hat{x}_{old}(\theta+i|\theta+i) = \Delta(\theta, \theta+i)\hat{G}(\theta) \dots \dots \dots (68)$$

こうして得られる \hat{x}_{new} は $\hat{G}(\theta)$ に誤差を含むことから図-1(a)に示す \hat{x}_{new} とは一致せず、ずれを生ずる。したがって、式(68)により、時点 $(\theta+i)$ で状態量の修正を行ったとき、同時に推定誤差共分散も $\hat{x}_{new}(\theta+i|\theta+i)[=x_{new}(\theta+i) - \hat{x}_{new}(\theta+i|\theta+i)]$ の推定誤差共分散 $P_{new}(\theta+i|\theta+i)$ に修正する必要がある。ここで

$$P_{new}(\theta+i|\theta+i) \triangleq E[(x_{new}(\theta+i) - \hat{x}_{new}(\theta+i|\theta+i)) \cdot (x_{new}(\theta+i) - \hat{x}_{new}(\theta+i|\theta+i))^T] \dots \dots \dots (69)$$

式(68)に式(19)を代入すると、

$$\hat{x}_{new}(\theta+i|\theta+i) = \hat{x}_0(\theta+i|\theta+i) + \Phi^*(\theta, \theta+i)G(\theta) - \Delta(\theta, \theta+i)[G(\theta) - \hat{G}(\theta)] \dots \dots \dots (70)$$

したがって式(70)と式(14)から

$$x_{new}(\theta+i) - \hat{x}_{new}(\theta+i|\theta+i) = x_0(\theta+i) - \hat{x}_0(\theta+i|\theta+i) + \Delta(\theta, \theta+i)[G(\theta) - \hat{G}(\theta)] \dots \dots \dots (71)$$

これを式(69)に代入し、 $(x_0 - \hat{x}_0)$ と $(G(\theta) - \hat{G}(\theta))$ とが互いに独立であることと式(60)を考慮すると、

$$\therefore P_{new}(\theta+i|\theta+i) = P_0(\theta+i|\theta+i) + \Delta(\theta, \theta+i)\mu^{-1}(\theta, l)\Delta^T(\theta, \theta+i) \dots (72)$$

これが推定誤差共分散行列の修正式である。これは Willksyら⁹⁾が修正に用いている共分散行列の修正式と同じになる。この式の $P_0(\theta+i|\theta+i)$ は $E[(x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^T]$ である。すなわち異常が発生していないときの通常のカルマンフィルターの式 (6), (9), (12) の計算ループで求められる状態量 x_0 の推定誤差共分散行列である。さてこの $P_0(\theta+i|\theta+i)$ は式 (28) のところで述べているように、 \hat{x}_{old} の計算で用いる推定誤差共分散行列でもある。したがって式 (72) の $P_0(\theta+i|\theta+i)$ には、いま計算が行われている \hat{x}_{old} の算定過程で得ら

れている推定誤差共分散行列を用いばよい。以上のようにして、異常発生検出時点 ($\theta+i$) で、状態量の推定値と推定誤差共分散行列の修正を行えば、これ以後は通常のカルマンフィルターにより計算してゆけばよい。

図-3に本算定法による AKF のアルゴリズムを示す。この図で、状態推定量の収束とは、カルマンフィルターの計算による状態推定量が定常になった場合を意味する。また $\phi_*(k_{now}, l)$, $\phi_*(k_{max}, l)$ はそれぞれ本文中の ϕ_{*now} , ϕ_{*max} のことである。

4. 計算例

(1) 模擬データに対する定式化と適用結果

いま多周期成分の周期関数で表わされる時系列に異常値が発生する場合を模擬発生させ、このデータに本算定法を適用して検討してみよう。

ここで、多周期成分の周期関数による時系列を取り上げたのは、①周期関数による時系列の表示は多くの工学の分野でしばしば採用されている、②周期関数を用いると、各周期成分に対する異常値が検出され、異常をスペクトルの変化としても検出でき、計測制御の分野でいう異常診断手法の一つとして利用できる、③地球は自転および公転による周期運動をしていて、その自然現象には周期性が存在している^{11, 9), 10)}、ことなどを考慮したからである。

なお ζ_{en} は河川の月流量を周期性確率変数と考えて、カルマンフィルターにより河川の月流量の予測を行い有意な結果をえている¹¹⁾。

ここでは、次の周期関数を用いる。

$$y(k) = \sum_{i=1}^q (A_i \sin 2\pi f_i k + B_i \cos 2\pi f_i k) + w(k) \dots (73)$$

- k : 時点, y : 時系列の値, f_i : 周波数成分
- q : f_i の個数, A_i, B_i : f_i に対する振幅
- w : 平均値 0 で分散 W の正規性白色雑音

ここで w には平均値 0 で標準偏差 0.25 の正規乱数を与え、 $q=5$ とし、表-1のように周波数成分、異常発生時点 $\theta=72$ の前後の状態量 (振幅) [その差は異常値 $G(\theta)$] を与え、時系列を時点 180 まで模擬発生させた。この周波数成分と異常発生前の振幅は、福岡市旬降水量の MEM によるスペクトル解析の結果など¹⁴⁾を参考にした。

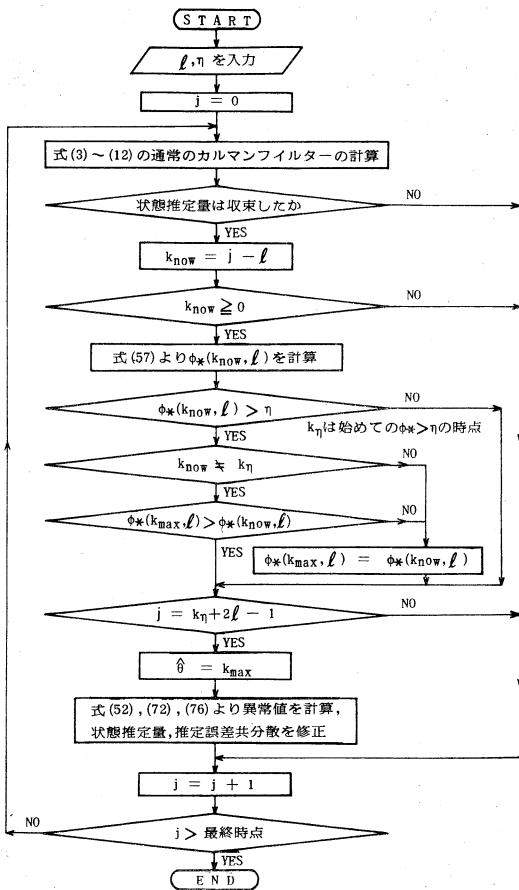


図-3 本算定法のアルゴリズム

表-1 模擬発生に与えた数値

周波数 f_i	1/36		1/18		1/9		1/7		1/6	
	A_1	B_1	A_2	B_2	A_3	B_3	A_4	B_4	A_5	B_5
$1 \leq k \leq 72$	-0.7	-2.5	0.0	0.0	0.0	1.2	-0.6	-1.1	0.6	0.6
$73 \leq k \leq 180$	0.5	1.0	-0.6	-2.5	0.0	0.0	0.0	0.0	-0.5	-1.0
異常値 $G(\theta)$	1.2	3.5	-0.6	-2.5	0.0	-1.2	0.6	1.1	-1.1	-1.6

以上の模擬データについて、式 (73) の周波数成分 f_i を既知として、振幅 A_i, B_i を同定し、時系列 $y(k)$ の予測を行う場合を考える。すなわちシステム方程式 (1) は、状態量 $x=[A_1, B_1, \dots, A_5, B_5]^T$, $\Phi(k)=I$ とした場合となり、観測方程式 (2) は式 (73) であって、 $H(k)=[\sin 2\pi f_1 k, \cos 2\pi f_1 k, \dots, \sin 2\pi f_5 k, \cos 2\pi f_5 k]$ とした場合となる。なお本例は状態量ベクトルの次元 $n=10$, 観測量ベクトルの次元 $m=1$ の場合となる。

いま $U=0, W=0.25^2$ (この場合スカラー) とし、初期値 $\hat{x}((0|0))$ は表-1 第3行の値を、また $P(0|0)$ は対角成分に 5.0, それ以外の成分には 1.0 を与え、 $l=15$ (本例では $l_{min}=10$), $\eta=7.0$ とする。こうして模擬発生の時系列 y に対して、通常のカルマンフィルターと本 AKF による振幅 A_i, B_i の同定結果を図-4 に示す (この図では 3 ステップごとの値をプロットしている)。また 1 ステップ先の予測値と予測残差を図-5, 図

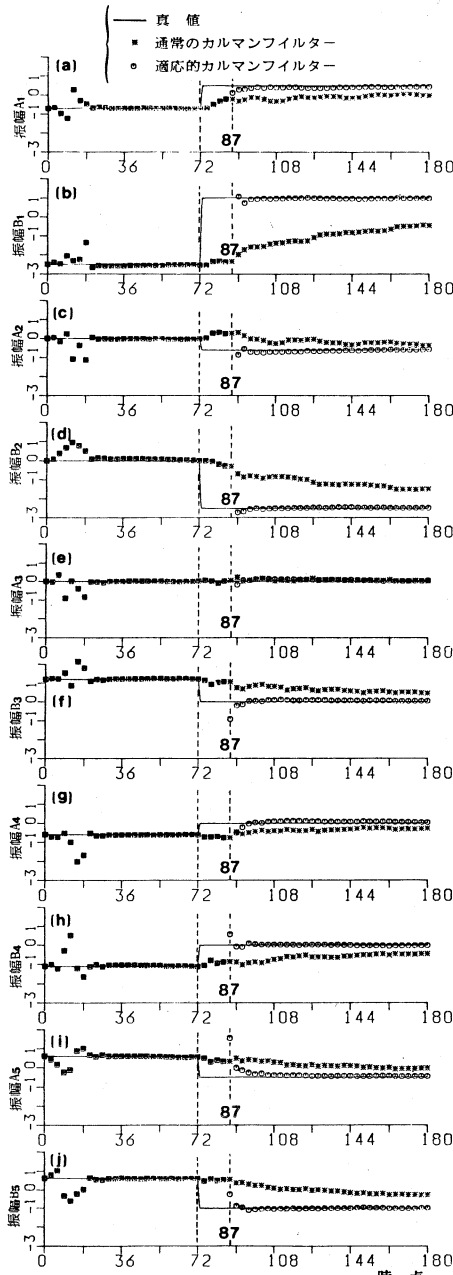


図-4 振幅 A, B の同定結果

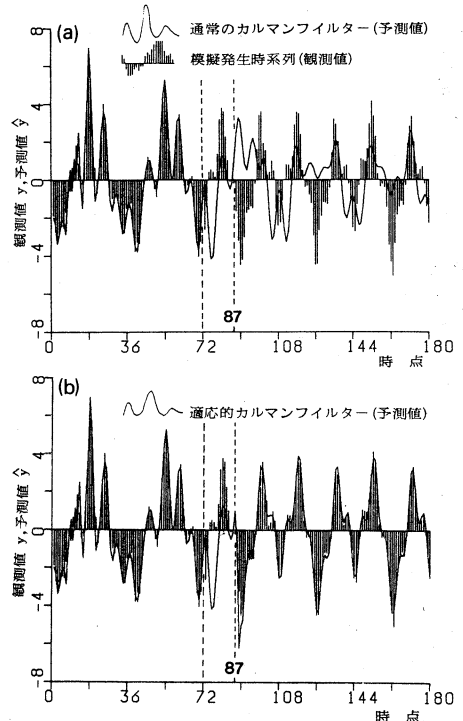


図-5 観測値と 1 ステップ先の予測値

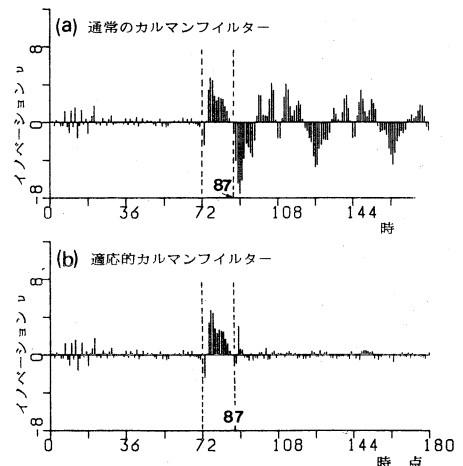


図-6 イノベーション

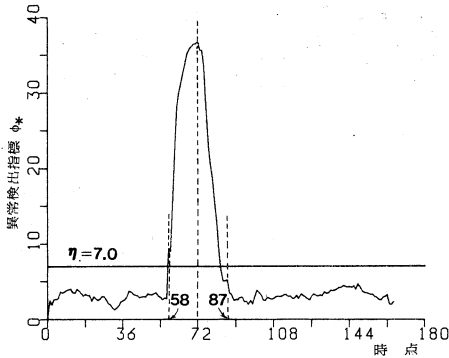


図-7 異常検出指標 (適応的カルマンフィルター ($l=15$))

—6に、異常検出指標 $\phi_*(k, l)$ を図-7に示す。以上の計算はすべて倍精度で行った。

(2) 考 察

通常のカルマンフィルターでは、振幅 A_i , B_i の異常を徐々にしかとらえることができず図-4のように振幅の同定結果に大きな誤差を生じている。このため図-5(a), 図-6(a)のように異常発生後大きな予測誤差を生じている。次に本AKFの適用結果をみると、異常発生時点の検出では、図-7のように、時点58で異常検出指標が増加し始め、ただちに $\eta=7.0$ を越している。すなわち $k_n=58$ である。したがって、これより ($l-1$) ステップの間すなわち時点 $k_n+l-1=72$ までに θ は存在することになるが、この間の ϕ_* の最大の時点として時点72が得られ、これを異常発生時点と判定している。したがって、判定時点87で状態量(振幅)とその推定誤差共分散の修正を行っている。この修正値 \hat{x}_{new} は前述のように $\hat{G}(\theta)$ に誤差が含まれているため、図-4の時点87に示されるように、修正当初は状態量により一致を示さない(時点87で丸印がない図は、図の目盛りの範囲に表わせなかった場合である)。このような修正の行き過ぎすなわちオーバーシュートも時点87以後、 \hat{x}_{new} と P_{new} を用いた計算によりすみやかに収束していることがわかる。すなわち表-1のように、異常発生時点での振幅の符合変化、振幅の無変化、ある振幅の出現や消滅、 $f_i=1/7$ と $f_i=1/6$ のかなり近接した周波数の振幅の変化なども正しく同定されている。その結果、図-5(b), 図-6(b)の時点87以後に示すように異常発生後の観測時系列により適合を示し、予測残差もかなり小さくなっている。前述のように、状態量がかなりオーバーシュートしている時点87直後の短い期間についても、観測量の予測値はかなり正確に求まり予測誤差も小さくなっていることは興味のあることである。これはおのおのの振幅がオーバーシュートしてずれていても、式(73)のようにこれらの振幅の組合せの結果、異常発生後の時系列に適合するようになっていいると考えられる。

また l を大きくすればオーバーシュートをかなり小さく抑えることができるようである。なお図-7の時点72以後の減少曲線は時点87で行われた修正により、減少したイノベーションと増加した共分散 (P_{new}) が ϕ_* の算定に加わってゆくので、かなり急激に減少している。以上のように本AKFは異常発生時点を的確に検出し、その後の状態量(振幅)および観測値にすみやかに追隨していることがわかる。

閾値 η の設定については、異常値が発生した場合と発生していない場合の ϕ_* の確率分布から第1種の誤りと第2種の誤りの確率を考慮して η を定める方法など理論的な研究は種々行われている^{9), 15)}が、実際問題に対して、これらは使いにくく、またこれにより得られた η が実際の ϕ_* 曲線での異常値の判定に必ずしも妥当な値となっていない場合がある。したがって η の実用的な設定方法として、 U , W , および l を適当に定めて、まず異常発生のない通常状態のデータについて、 ϕ_* をいくつか計算して、この ϕ_* 曲線が引かからない程度に、すなわちこの ϕ_* 曲線の上限よりある程度大きめの値を求めて、これを η とする方法が具体的と考えられる。なお、時系列の雑音が増加精度に及ぼす影響については参考文献8)を参照されたい。

本計算例では、 l を固定した方法を用いているので、従来の方法に比べて ϕ_* の算定回数が著しく減少し計算量が非常に軽減されている。また次元 n が大きくなるとこの計算量の軽減の度合は著しくなる。また n が大きくなると、複雑な行列計算のため誤差が大きくなり倍精度の演算が望ましいと考える。

5. む す び

本論文は、異常発生時に観測値への追隨を迅速に行う適応的カルマンフィルターにおいて、異常値および観測量がいずれもベクトルである最も一般的な場合を対象にして、これに現われる式の誘導過程を示すとともに、本手法のメカニズムを明らかにすることを試みたものである。特に、異常発生時点検出の計算の簡易化とオンラインによる異常発生時点の新たな検出法を提案し、この検出法が有用であることを示し、次いで本手法のアルゴリズムを示している。次に、多周期成分の周期関数表示の時系列に異常が発生した場合を模擬発生させこれに本手法を適用している。その結果、本手法は異常値(ベクトル)を的確に同定できることおよび通常のカルマンフィルターに比べ異常発生後の追隨が非常に速く行われ、予測精度の顕著な向上が得られることがわかった。以上により本手法の適応性、有効性および異常検出性能などが明らかにされたものとする。またこの手法は、異常発生によって状態量に変化して後、ある期間の経過後、再び

状態量が急激に元に戻る場合も、その戻る時点を異常発生時点としてとらえることができ、このような場合にも有効に利用できると思われる。

さて、適応的カルマンフィルタの理論は通常のカルマンフィルタの理論を包含するもので、状態量に異常値が発生しなければ通常のカルマンフィルタと等価になる。したがって、適応的カルマンフィルタは、通常のカルマンフィルタが適用できる問題にはすべて適用可能であり、このうえにさらに状態量に異常値が発生する場合にも適用可能となっていて、適用範囲が通常のカルマンフィルタより拡張されている。したがって本手法は、時系列の予測以外の状態推定問題にも適用できると考える。

土木工学の分野では降雨、流量などの水文量の時系列に生ずる異常現象、流域の地被状態の急変による単位図の変化、河川、湖沼の水質汚染の時間的変動状態の外部要因による変化、あるいはトラスの、ある部材の事故発生時に生ずる、動荷重によるトラス全体の振動性状の変化など、異常現象は数多く存在している。本手法はこのような事前に予測することが困難な異常現象に対して、有効な手法と考えられる。この場合、これら実際の現象を、適応的カルマンフィルタの理論にのるように、システム方程式(13)と観測方程式(2)の方程式をいかに構成するかが、最大の課題となると考えられる。今後、降雨、流量の時系列など、実際の諸現象について、本手法の適用にあたっての諸問題をさらに研究してゆきたいと考えている。

終わりに本研究において本学電気工学科 橋本修輔博士に有益なご助言を頂いた。ここに記して深謝申し上げます。

参 考 文 献

- 1) 山本義一編：気候変動，東京大学出版会，pp.32~42，1979年。
- 2) 計測自動制御学会編：異常検出予測技術シンポジウム報告集，1978年11月。
- 3) 日野幹雄：水文流出系予測へのカルマン・フィルタ理論の適用，土木学会論文報告集，第221号，pp.39~47，1974年1月。
- 4) Mehra, R.K. : On the identification of variances and adaptive Kalman filtering, IEEE Trans. on Automatic Control Vol.AC-15, No.2, pp.175~184, April, 1970.
- 5) Willsky, A.S. and Jones, H.L. : A generalized likelihood ratio approach to the detection and estimation of jumps in linear systems, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol.AC-21, No.1, pp.108~112, February, 1976.
- 6) Kitanidis, P.K. and Bras, R.L. : Adaptive filtering through detection of isolated transient errors in rainfall-runoff models, Water Resources Research, Vol.16, No.4, pp.740~748, August, 1980.
- 7) 熊丸耕介・鬼木 茂・岐部勝彦：複合ダイナミックパターン変化を伴う線形系の識別同定，九大工学集報，第50巻，第5号，pp.571~576，1977年10月。
- 8) 上田年比古・河村 明・神野健二：時系列のシステムパラメータのジャンプ変動の同定，第27回水理講演会論文集，pp.497~504，1983年2月。
- 9) 日野幹雄：カルマンフィルタと多変量解析を組み合わせた確率過程の予測法，土木学会論文報告集，第288号，pp.45~54，1974年8月。
- 10) 河村 武編：気候変動の実態，古今書院，1980年。
- 11) Sen, Z. : Adaptive fourier analysis of periodic-stochastic hydrologic sequences, Journal of Hydrology, No.46, pp.239~249, 1980.
- 12) 有本 卓：カルマン・フィルタ，産業図書，1977年。
- 13) 日野幹雄：Kalmanの予測推定理論の平易な誘導について，東工大土木工学科研究報告，No.15，pp.91~99，1973年12月。
- 14) 上田年比古・神野健二・河村 明・高吉晋吾：降雨時系列が周期関数で表される場合の異常値検出について，九大工学集報，第55巻，第6号，pp.585~591，1982年12月。
- 15) Sanyal, P. and Shen, C.N. : Bayes's decision rule for rapid detection and adaptive estimation scheme with space application, JACC, pp.23~36, 1973. (1983.8.31・受付)