

周期関数時系列に対する適応的カルマンフィルターの異常値検出特性について

On the characteristics of the Adaptive Kalman Filter for Detecting Abnormality in a Periodic Time Sequence

九州大学大学院 学生員 河村 明
九州大学工学部 正 員 神野 健 二
九州大学工学部 正 員 上田 年比古

1. はじめに

水文現象の多くはその現象を支配する母集団のパラメーターが時間的に変化する非定常な現象であると考えられるが、これを非定常現象として解析しているものは少ないようである。日野氏ら¹⁾は現象の母集団の性質の変化を察知し、将来予測に役立てることを目的として、非定常スペクトル解析の手法を研究し、これが水文現象の非定常性をいかに把えることが出来るかを検討しているが従来の非定常スペクトル解析手法を直接実際の水文現象に適用してもその非定常性を的確にとらえ、将来予測に適用するのは現時点では難しいようである。非定常時系列として、時系列を構成しているシステムに異常が生じ、ある時点においてシステムパラメーターの動特性が予期せず変化し、時系列のパターンが変化する場合がしばしばある。例えば、参考文献2)にみられる東京における1963年1月の異常な気圧低下や佐賀気象台における9月の雨量の少雨化傾向などがこれにあたるものと考えられる。このように、時系列のシステムに異常が生じ、そのシステムパラメーターがジャンプ的に変化する時系列をオンラインで予測する場合、事前にシステムの異常を予測することは困難であるので、異常発生以後においてその発生時刻やその大きさを早急に検出し、その後の時系列の推定を精度よく行い、対応策をたてることが望まれる。

さて異常値を含む時系列をオンラインで予測する場合、システムの異常発生時刻とその異常の規模を定量的に推定して、異常発生後の時系列に敏速に適合させてゆく方法として、一般化尤度比検定法をカルマンフィルター理論と融合して用いる適応的カルマンフィルターがある(以下AKFと記す)³⁾⁴⁾。著者らは先に、観測量、未知の異常値がともにベクトルで表される一般的なAKFについての誘導を行い、異常発生時点の検出法について実用的で簡易化された計算法を提案し、実際にオンラインでこのAKFを適用する場合のアルゴリズムを示した⁵⁾。

本報では多周期成分より成る周期関数で表わされる時系列に、異常値が発生する場合すなわち時系列のシステムパラメーターが途中で任意の大きさにジャンプ的に変化する場合を模擬発生させ、これに対し、本AKFおよび通常のカルマンフィルターを種々の条件の下で適用して、システムパラメーターの同定や時系列の予測を行い、これらの結果を比較検討して、多周期成分より成る周期関数時系列に対するAKFの異常値検出特性や一般的特性を詳しく検討する。

2. 適応的カルマンフィルター (AKF)⁵⁾

これは次の式(1)のようなシステム方程式で表されるシステムの状態量 x を推定するのに適用される理論で、そのシステムの状態量は式(2)の観測方程式を通してのみ観測される。

$$x(k+1) = \Phi(k)x(k) + \Gamma(k)u(k) + \delta_{k\theta}G(k) \tag{1}$$

$$y(k) = H(k)x(k) + w(k) \tag{2}$$

ここに、

- k : 時点
- Φ : 既知の状態遷移行列 ($n \times n$ 行列)
- u : システム雑音。平均0で分散行列 U の独立な正規性白色雑音 (p 次元ベクトル)
- θ : 異常発生時点
- G : 異常値ベクトル (n 次元ベクトル)
- H : 既知の観測行列 ($m \times n$ 行列)
- w : 観測雑音。平均0で分散行列 W の独立な正規性白色雑音 (m 次元ベクトル)
- x : システムの状態量ベクトル (n 次元ベクトル)
- Γ : 既知の変換行列 ($n \times p$ 行列)
- $\delta_{k\theta}$: クロネッカーのデルタ ($k = \theta$ で1, $k \neq \theta$ で0)
- y : 観測量ベクトル (m 次元ベクトル ($m \leq n$))

式(1)は通常のカルマンフィルターのシステム方程式に時点 $k = \theta$ で異常値 $G(\theta)$ が加わることを示している。この手法は1

ステップ先の観測値と予測値との差（イノベーション）の変動の状況から、状態量の異常発生の有無を一般化尤度比検定法により検定し、もし、異常発生と判定されれば、その発生時点 θ と異常値の大きさ $G(\theta)$ を推定し、判定時点において、異常値の大きさに応じて状態推定量とその推定誤差共分散行列を修正するものである。

いま、異常値が発生していないとする場合を仮説 H_0 、 $k = \theta$ で状態量に異常値 $G(\theta)$ が発生したとする場合を仮説 H_1 として検討を進める。仮説 H_0 の場合は通常のカルマンフィルターによりシステムの状態量を推定する。一方仮説 H_1 の場合、異常発生したが、これに気づかずにそのまま通常のカルマンフィルターにより計算を続行して得られる値に添字 old を付けると、システムの線形性よりイノベーション（1ステップ先の観測値の予測残差） $\nu_{old}(\theta+i)$ は以下のように異常値の影響を受けない項（添字 0 で表わす仮説 H_0 の下での値）と受ける項とに分離できる。すなわち

$$\nu_{old}(\theta+i) = \nu_0(\theta+i) + A(\theta, \theta+i)G(\theta) \quad (3)$$

ここに、

$$A(\theta, \theta+i) \triangleq H(\theta+i)\Psi(\theta, \theta+i) \quad (4)$$

$$\Psi(\theta, \theta+i) \triangleq \begin{cases} \Phi(\theta+i-1) [I - K(\theta+i-1)H(\theta+i-1)] \Psi(\theta, \theta+i-1) & (\text{if } i \geq 2) \\ I & (\text{if } i=1) \\ 0 & (\text{if } i \leq 0) \end{cases} \quad (5)$$

\triangleq : 定義 I : 単位行列 (ここでは $n \times n$ 行列)

また、イノベーションベクトル (m 次元) の期待値と共分散を求めると、

$$E[\nu_0(\theta+i)] = 0 \quad (6)$$

$$E[\nu_{old}(\theta+i)] = A(\theta, \theta+i)G(\theta) \quad (7)$$

$$\text{Cov}[\nu_0(\theta+i)] = \text{Cov}[\nu_{old}(\theta+i)] = H(\theta+i)P_0(\theta+i | \theta+i-1)H^T(\theta+i) + W(\theta+i) \triangleq V(\theta+i) \quad (8)$$

ここに、 T : 転置記号 $E[\]$: 期待値演算 $\text{Cov}[\]$: 共分散演算

$P_0(\theta+i | \theta+i-1)$: システム状態量に異常がないとする通常のカルマンフィルターの計算ループで求められる、

時点 $(\theta+i-1)$ までの観測量を用いた時点 $(\theta+i)$ のシステム状態量の推定誤差共分散行列

$\nu(\theta+i)$ は正規分布をなす $u, w, x(0)$ の線形関数であるから、仮説 H_0, H_1 のいずれの下でも m 次元の多変量正規分布を成している。そしてこれらの平均値と共分散は式(6)~(8)である。よって異常発生以後の l 個のイノベーションが、それぞれの仮説の下で同時に生起する同時確率密度関数は、 $\nu(\theta+i) \{i=1, 2, \dots, l\}$ が互いに独立であることから次式のように表される。

$$p(\nu(\theta+1), \dots, \nu(\theta+l) | H_0) = \prod_{i=1}^l \frac{1}{(2\pi)^{m/2} |V|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \nu^T V^{-1} \nu \right\} \quad (9)$$

$$p(\nu(\theta+1), \dots, \nu(\theta+l) | H_1) = \prod_{i=1}^l \frac{1}{(2\pi)^{m/2} |V|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\nu - AG]^T V^{-1} [\nu - AG] \right\} \quad (10)$$

ここに、 $\nu = \nu(\theta+i), V = V(\theta+i), A = A(\theta+i), G = G(\theta)$ の意味である。よって仮説 H_0 と H_1 でのイノベーション系列の尤度比 $\Lambda(\theta, G(\theta), l)$ (スカラー) は、式(9)と式(10)の比として次式となる。

$$\begin{aligned} \Lambda(\theta, G(\theta), l) &\triangleq \frac{p(\nu(\theta+1), \dots, \nu(\theta+l) | H_1)}{p(\nu(\theta+1), \dots, \nu(\theta+l) | H_0)} \\ &= \exp \left\{ \varphi^T(\theta, l) G(\theta) - \frac{1}{2} G^T(\theta) \mu(\theta, l) G(\theta) \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

ここに、

$$\varphi(\theta, l) \triangleq \sum_{i=1}^l A^T(\theta, \theta+i) V^{-1}(\theta+i) \nu(\theta+i) \quad (n \text{次元ベクトル}) \quad (12)$$

$$\mu(\theta, l) \triangleq \sum_{i=1}^l A^T(\theta, \theta+i) V^{-1}(\theta+i) A(\theta, \theta+i) \quad (n \times n \text{行列}) \quad (13)$$

いま式(11)の尤度比を最大にする異常値 $G(\theta)$ の大きさがその最尤推定値 $\hat{G}(\theta)$ である。これは式(11)の対数を取り $G(\theta)$ で微分して0とおいて次のように得られる。

$$\hat{G}(\theta) = \mu^{-1}(\theta, l) \varphi(\theta, l) \quad (14)$$

この $\hat{G}(\theta)$ を用いた尤度比 $\Lambda(\theta, \hat{G}(\theta), l)$ は一般化尤度比と定義され、次式となる。

$$\Lambda(\theta, \hat{G}(\theta), l) = \exp\left\{\frac{1}{2}\phi^T(\theta, l)\mu^{-1}(\theta, l)\phi(\theta, l)\right\} \quad (15)$$

さて、式(15)の一般化尤度比(スカラー)の大きさにより仮説 H_0 , H_1 のいずれを受容するかを決定するのが一般化尤度比検定である。すなわち式(15)がある値よりも大きければ仮説 H_1 を受容し、小さければ仮説 H_0 を受容する。ここでは次式で定義される $\phi_*(\theta, l)$ (スカラーで異常検出指標と呼ばれる)と閾値 η の大きさを比較し、異常発生の有無を検定する。

$$\phi_*(\theta, l) \triangleq \sqrt{2\ln\Lambda(\theta, \hat{G}(\theta), l)} = \sqrt{\phi^T(\theta, l)\mu^{-1}(\theta, l)\phi(\theta, l)} \quad (16)$$

$$\begin{array}{l} H_1 \\ \phi_*(\theta, l) \geq \eta \\ H_0 \end{array} \quad (17)$$

次に異常発生時点 θ の最尤推定値 $\hat{\theta}$ は、一般化尤度比を最大にする時点 k として得られる。すなわち、

$$\hat{\theta} = \{k | \max \Lambda(k, \hat{G}(k), l)\} = \{k | \max \phi_*(k, l)\} \quad (18)$$

従って、この式で求められる $\hat{\theta}$ を式(17)の θ に用いて、一般化尤度比検定を行い、異常発生時点と異常値の最尤推定値を決定することになる。ここで、式(18)を用いたオンラインによる具体的に実用的な異常発生時点の検出法については参考文献5)を参照されたい。

一般化尤度比検定法により異常値が検出、同定されると、異常値の検出時点においてこれまでのシステム状態量 \hat{x}_{old} と推定誤差共分散行列 P_0 を次式のように \hat{x}_{new} と P_{new} に修正して、異常後のシステムに適応させることになる。

$$\hat{x}_{new}(\theta+i | \theta+i) = \hat{x}_{old}(\theta+i | \theta+i) + \Delta(\theta, \theta+i)\hat{G}(\theta) \quad (19)$$

$$P_{new}(\theta+i | \theta+i) = P_0(\theta+i | \theta+i) + \Delta(\theta, \theta+i)\mu^{-1}(\theta, l)\Delta^T(\theta, \theta+i) \quad (20)$$

ここに、

$$\Delta(\theta, \theta+i) \triangleq [I - K(\theta+i)H(\theta+i)]\Psi(\theta, \theta+i) \quad (n \times n \text{ 行列}) \quad (21)$$

3. 周期関数時系列に対する定式化

いま次式のような多周期成分の周期関数で表される時系列を考える。すなわち時系列 y を周期性確率変数と考える。ここではある数個の周波数成分をとり、それ以外の周波数成分は白色雑音と考えている。

$$y(k) = \sum_{i=1}^q (A_i \sin 2\pi f_i k + B_i \cos 2\pi f_i k) + w(k) \quad (22)$$

ここに、

- | | | |
|----------------------------|---------------------------|---------------|
| k : 時点 | y : 時系列の値 | f_i : 周波数成分 |
| q : 周波数成分の個数 | A_i, B_i : f_i に対する振幅 | |
| w : 平均値0で分散 W の正規性白色雑音 | | |

ここで多周期成分の周期関数による時系列を取り上げたのは、①周期関数による時系列の表示は多くの工学の分野でシステムの動特性としてしばしば採用されていること、②異常をスペクトルの変化としても検出できるので、計測制御の分野でいう異常診断手法の一つとして利用できること、③地球のスケールの自然現象には周期性が存在し、自然現象のシステムモデルとして周期関数で表される場合が少なくない⁶⁾ことなどを考慮したからである。§ 5 en は河川の月流量を周期関数で表し、カルマンフィルターによりこれを予測し、有意な結果を得ている⁷⁾。

ここで式(22)の周波数成分 f_i を既知として、カルマンフィルターにより振幅 A_i, B_i を同定し時系列 $y(k)$ の予測を行う場合を考える。すなわちシステム方程式(1)は、この式の状態量 $x(k) = [A_1 \ B_1 \ \dots \ A_q \ B_q]^T, \Phi(k) = I$ とした場合となり、観測方程式(2)は式(22)であって、 $H(k) = [\sin 2\pi f_1 k \ \cos 2\pi f_1 k \ \dots \ \sin 2\pi f_q k \ \cos 2\pi f_q k]$ とした場合となる。なお状態ベクトルの次元 $n = 2q$ 、観測量ベクトルの次元 $m = 1$ である。また、式(22)は次式のように書き直すことができる。

$$y(k) = \sum_{i=1}^q R_i \sin(2\pi f_i k + \alpha_i) + w(k) \quad (23)$$

ここに、

$$R_i = \sqrt{A_i^2 + B_i^2} \quad (24)$$

$$\alpha_i = \tan^{-1}(B_i/A_i) \quad (25)$$

α_i : 周波数成分 f_i に対する位相

よって、状態量 x すなわち振幅 A_i 、 B_i が同定されれば、この同定結果より式 (25) を用いて、振幅 A_i 、 B_i の変化を各周波数成分に対する位相の変化としても検出できる。

さてAKFの計算で、式 (16) で定義される異常検出指標 ϕ_x と式 (14) の異常値の最尤推定値 $\hat{G}(\theta)$ の計算には、式 (13) で定義される $\mu(\theta, \ell)$ の逆行列を計算しなければならない。 μ の逆行列演算は行列 μ ($n \times n$ 行列) のランクがフルランクの n のとき計算可能となる。式 (22) の時系列のように観測量がスカラー ($m=1$) の場合、 μ の計算式 (13) で、加算される各項の行列のランクは1であるので、データ蓄積個数 ℓ を少なくとも状態量ベクトルの次元 n 以上に選ばなければ μ はフルランクにならない。この場合、通常 ℓ を n 以上にすれば μ はフルランクとなるが、 ℓ を n 以上にとっても μ がフルランクにならず μ の逆行列が存在しない場合でも、ランク不足のまま μ の逆行列をその一般化逆行列で代用することが考えられる。ここに、一般化逆行列 A^+ とは、ある任意の行列 A の逆行列 A^{-1} の概念を拡張した行列である⁸⁾。一般化逆行列を定義する場合には、i) どのような行列 A に対しても必ず存在すること。すなわち A^{-1} は A が正則な正方行列でない場合は定義できない (存在しない) が、 A^+ は正則でない (A の行列式の値が0である) 場合の行列に対しても、また長方形行列に対しても定義できること。ii) A に対して一意的に定まること。iii) A が正方行列で正則な場合には $A^+ = A^{-1}$ となることが要求される⁹⁾。以上の性質を満足する一般化逆行列の定義の方法はいろいろある⁸⁾が、モーレ・ペンローズの一般化逆行列は次の四つの関係式を満足する行列 A^+ として定義される¹⁰⁾。

$$AA^+A = A \quad (26) \quad A^+AA^+ = A^+ \quad (27)$$

$$AA^+ = (AA^+)^T \quad (28) \quad A^+A = (A^+A)^T \quad (29)$$

このように定められた A^+ はまた次の関係式も成り立つ。

$$(A^+)^+ = A \quad (30)$$

一般化逆行列を数値的に求める方法としては、固有値計算のサブルーチンを利用する方法、消去法、反復法など各種の方法があるが⁸⁾、ここではグラムシュミットの正規直交化を利用して一般化逆行列を求めた。一般化逆行列は連立一次方程式の最小二乗解などの計算に応用されている⁸⁾¹¹⁾。

4. 計算例

いま式 (22) で表される時系列に異常値が発生する場合、すなわちシステムパラメータである振幅 A_i 、 B_i がある時点で任意の大きさにジャンプ的に変化する場合を模擬発生させ、このデータにAKFを適用して検討して見よう。ここでは w には平均値0で標準偏差5の正規乱数を与え、 $q=10$ とし、表-1のように周波数成分、異常発生時点 $\theta=180$ の前後の状態量 (振幅) [その差は異常値 $G(\theta)$] を与え、時系列を時点360まで模擬発生させた。いま $U=0$ 、 $W=5^\circ$ とし、初期値 $x(0|0)$ は表-1第3行の値を、また $P(0|0)$ は対角成分に5、それ以外の成分には1を与え、閾値 $\eta=10$ とする。この場合の行列 μ (20×20 行列) のランクの変化を図-1に示す。この図より ℓ が15以後は μ のランクは徐々にしか上がらず $\ell=49$ でフルランクの20になっている。そこで $\ell=60$ として μ がフルランクの場合で、模擬時系列 y に対して、本AKFと通常のカルマンフィルターによる振幅 A_i 、 B_i の同定結果の一部を図-2に示す。また1ステップ先の予測値と予測残差を図-3、図-4に、異常検出指標 $\phi_x(k, \ell)$ を図-5に示す。なお図-5には状態量とその推定誤差共分散を修正しなかった場合、すなわち通常のカルマンフィルターによるイノベーションより計算した場合の ϕ_x も示している。そしてAKFで $\ell=47$ とした場合、すなわち図-1のように μ のランクが19でフルランクの20に満たないままで、一般化逆行列でその逆行列を代用した場合の結果を図-6に、 $\ell=40$ (μ のランクは18) の場合のイノベーションを図-7に示す。さらに通常のカルマンフィルターで $W=0.025$ とした場合、時点241で推定誤差共分散行列 $P(k|k)$ の全要素を改めて10に増大させて再設定した場合のパラメータ変化図の一部とイノベーションをそれぞれ図-8、図-9に示す。

5. 考察

10本の周波数成分成分で構成される図-3の模擬時系列はかなり複雑な形状をしており、見ただけでは時系列のパターンの変化は識別できない。通常のカルマンフィルターでは、振幅 A_i 、 B_i の異常を徐々にしかとらえることができず、異常発生後の

表-1 模擬発生に与えた数値

周波数 f_i	1/360		1/144		1/108		1/72		1/36		1/18		1/9		1/7		1/6		1/3		
振幅	A_1	B_1	A_2	B_2	A_3	B_3	A_4	B_4	A_5	B_5	A_6	B_6	A_7	B_7	A_8	B_8	A_9	B_9	A_{10}	B_{10}	
$1 \leq k \leq 180$	9	10	-12	0	15	13	5	-7	-25	0	7	0	12	-6	-11	0	15	-8	12		
$180 \leq k \leq 360$	-9	5	3	-10	-10	-15	-6	6	20	23	23	21	0	-12	20	3	-10	0	12	-5	
異常値 $G(\theta)$	-18	-5	15	-10	-25	-28	-11	13	27	48	23	14	0	-24	26	14	-10	-15	20	-17	

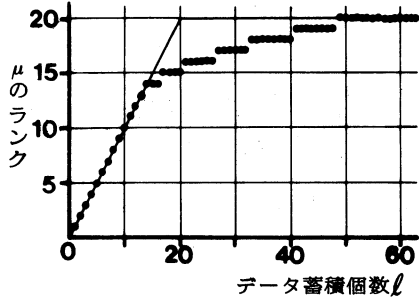


図-1 μ のランクの変化

振幅の同定結果は図-2のように誤差を生じている。このため図-3 (b), 図-4 (b) のように異常発生後に大きな予測誤差を生じている。次に $l=60$ のAKFの適用結果をみると、図-5 (a) のように時点240で、 ϕ_* の最大時点として異常発生時点 $\hat{\theta}=180$ (正しい異常発生時点) が得られ、時点240において状態量と、その推定誤差共分散の修正を行った。この場合、図-2 (a), (b) に示されるように長周期成分に対する振幅の同定では修正当初においては状態量により一致を示さずオーバーシュート (修正の行き過ぎ) が相当大きくなっている。このオーバーシュートは長周期成分に対するもの程大きくなるが、これは高々60個程度の短く、また雑音を含んだ観測データから、周期が360ステップもある長周期成分の振幅を求めようとしているからであると考えられる。なお $f_6 \sim f_{10}$ のような周期が18ステップ以下の短周期成分に対する同定では図-2 (c) のようにオーバーシュートはほとんど現れなかった。このことは振幅 B_i に対しても同様である。しかし、長周期成分に対する振幅も、推定誤差共分散行列が修正されているため通常のカルマンフィルタに比べ比較的速やかに収束されており、表-7のように、異常発生時点での振幅の符号変化、振幅の無変化、ある振幅の出現

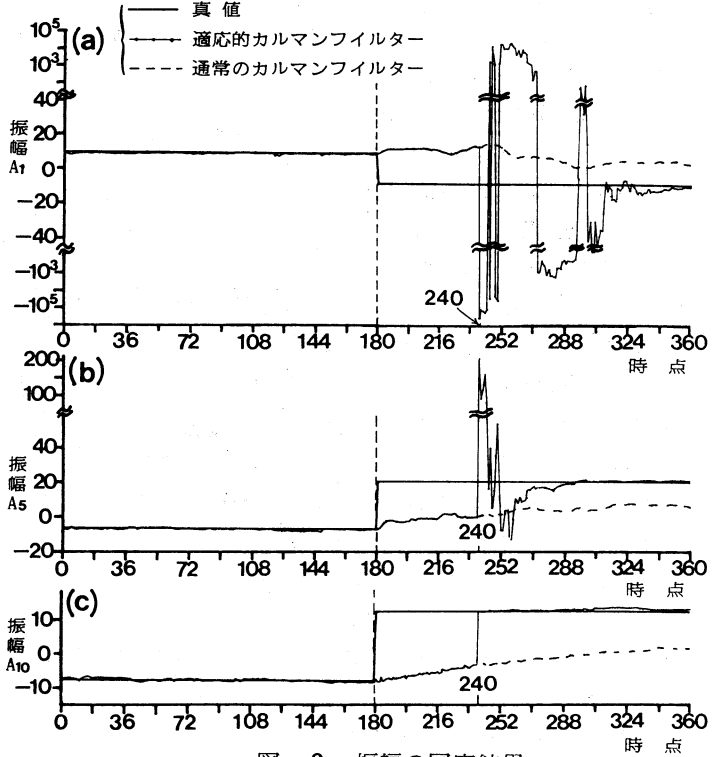


図-2 振幅の同定結果

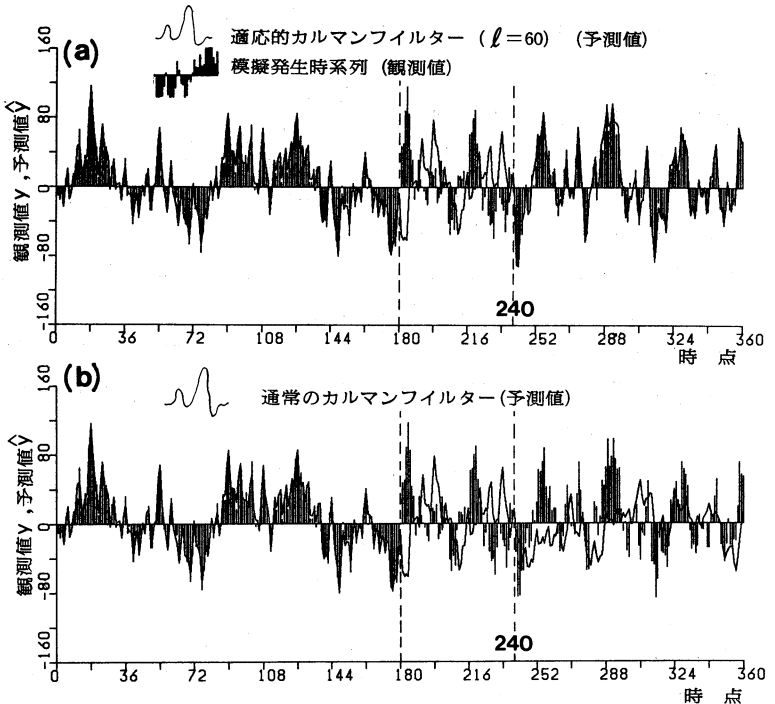


図-3 観測値と1ステップ先の予測値

や消滅、 $f_8 = 1/7$ と $f_9 = 1/6$ のかなり近接した周波数の振幅の変化なども正しく同定されている。その結果、図-3

(a), 図-4 (a) のように異常発生後の観測時系列により適合を示し、予測誤差もかなり小さくなっている。ここで特に注目すべきことは、図-2 に示されるように状態量修正後、長周期成分の振幅が相当オーバーシュートしている期間(時点241以後時点300程度までの期間)であっても、その予測値は図-4 (a), 図-5

(a) のようにより正確に求められ予測誤差も小さくなっていることである。これは各々の振幅がズれていても式(22)のようにこれらの振幅の組み合わせで異常発生後の時系列に適合するようになっていいると考えられる。なお、時点240での修正による図-5 (a) の ϕ_* は修正を行わない図-5 (b) の ϕ_* に比べかなり急激に減少していることが分かる。また同定された振幅を用いて式(25)を計算することにより、各周波数に対する位相の変化も速やかに同定できる。

次にAKFにおいて $l=47$ として μ のランクが19で一般化逆行列を用いた場合は、図-6 (a) のように時点227において $\hat{\phi}=180$ が得られ、 $l=60$ の場合よりも13ステップ早く異常値を検出して状態量の修正を行っている。この場合、周期が18ステップ以上の長周期成分に対してオーバーシュートが生じ、その大きさも $l=60$ の場合に比べて2桁程度大きくなった。最終時点における振幅の同定結果でも、 $l=60$ の場合に比べ、108ステップ以上の長周期成分に対しては誤差が大きくなった。このため図-6 (b) のように、修正後の時点235で相当大きなイノベーションが現われている。しかし、それ以後のイノベーションは $l=60$ の場合(図-4 (a))と同程度に小さく、通常のカルマンフィルターのそれ(図-4 (b))に比べてかなり小さくなっている。なお、 $l=40$ で μ のランクが18で一般化逆行列

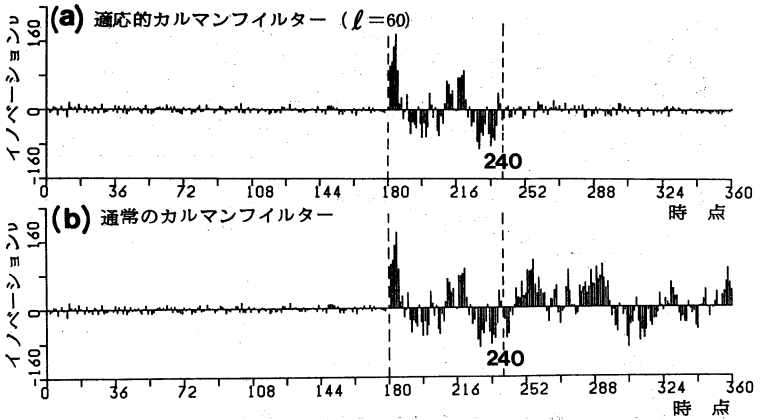


図-4 イノベーション

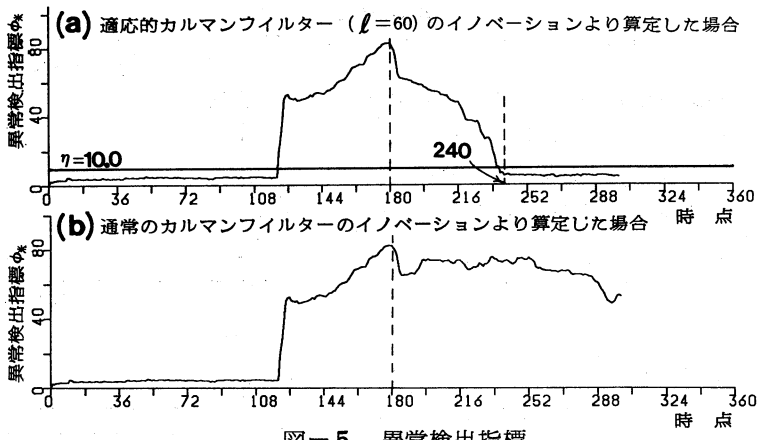


図-5 異常検出指標

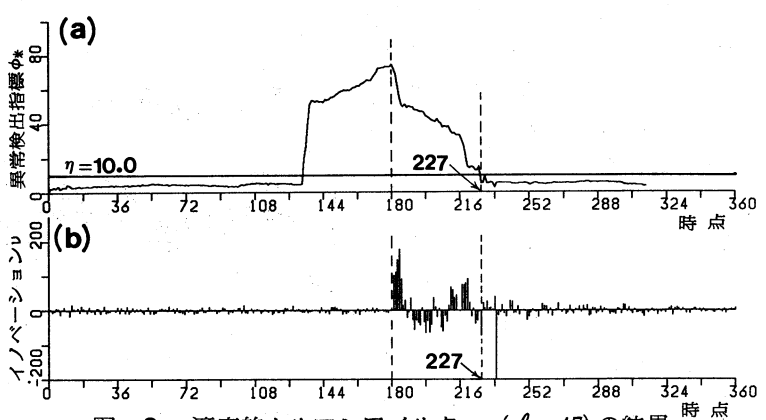


図-6 適応的カルマンフィルター ($l=47$) の結果

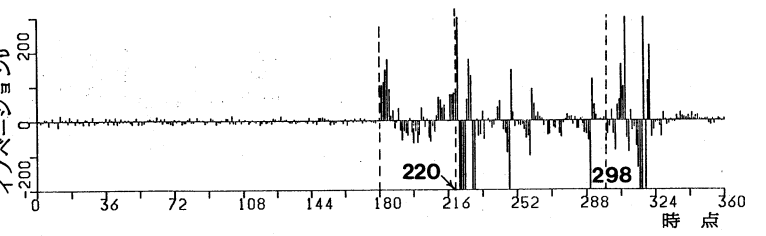


図-7 $l=40$ の適応的カルマンフィルターによるイノベーション

を用いた場合は、 ϕ_* もかなり変動しており図-5 (a), 図-6 (a) のように単純な凸型にはならず、時点220に対して $\hat{\theta} = 1.79$ が得られて修正を行ったが、図-7のようにイノベーションは小さくならず、時点298で $\hat{\theta} = 2.58$ として再度状態量の修正を行ったが、異常値の同定精度は低く、イノベーションは相当大きくなった。このことは μ のランクが小さくなる程著しくなった。以上のように本計算では、 μ のランクが18以下で一般化逆行列を用いた場合はイノベーションは大きくなり、同定精度もかなり低いものとなった。また μ のランクが19の同じ場合でも ℓ を小さくすると同定精度は低くなり、イノベーションも大きくなる傾向にあり、このことは μ がフルランクの場合でも同様である。一般に μ のランク不足のまま一般化逆行列を用いた場合、異常値の検出修正時点は早くなるがその同定精度は低く予測値の精度も不安定である。そしてシステムパラメータが多くなる程、またシステムに含まれる成分が長周期になる程、 ℓ を大きくとらなければ異常値の検出や同定の精度は低くなる。

さて通常のカルマンフィルターにより異常発生後の時系列に速やかに適合させるため、観測雑音の分散 W を実際の分散の千分の一と小さく見積もってカルマンゲインを増大させる場合や、通常のカルマンフィルターで異常を判断できたとして、その判断時点（ここでは $\ell = 60$ のAKFの異常検出時点240）で、推定誤差共分散行列を改めて増大させて設定し直し、カルマンゲインを増大させる場合は、図-8、図-9のように異常後の振幅を的確にはとらえられずイノベーションも大きくなっている。なおシステム雑音の分散 U を大きく見積もってカルマンゲインを増大させた場合は、異常後のパラメータは時間とともに大きく変動しており真値には収束せずイノベーションも大きくなった。以上のことは、通常のカルマンフィルターが、線形のフィードバックを通じて観測値に追随するようにただ単にゆっくりと予測値を修正することができるにすぎず⁴⁾、システムパラメータのジャンプに対してこれを直接に補償する機能をもっていないことを示している。すなわち通常のカルマンフィルターでは、事後的に誤差が大きくなってゆくことが分かっていてもこれを有効に活用するのが難しいといえる¹²⁾。

なお以上においてAKFにおける長周期成分の振幅同定ではオーバーシュートが相当大きくなることを示したが、これは式(14)の長周期成分に対する異常値の推定誤差が非常に大きくなり、この推定値をもって式(19)で状態量を修正するからである。ここでこのオーバーシュートをなくそうとして式(19)の状態量の修正をせず、異常検出時点で式(20)による推定誤差共分散行列の修正だけを行った場合は、オーバーシュートはほとんど見られないが、この場合は通常のカルマンフィルターで推定誤差共分散行列の値を増大させて再設定することと同じ状態になり、イノベーションは通常のカルマンフィルターの場合と同様に大きくなる。この推定誤差共分散行列の値を再設定することは、これまで得られたイノベーション等の情報を放棄することに相当し、

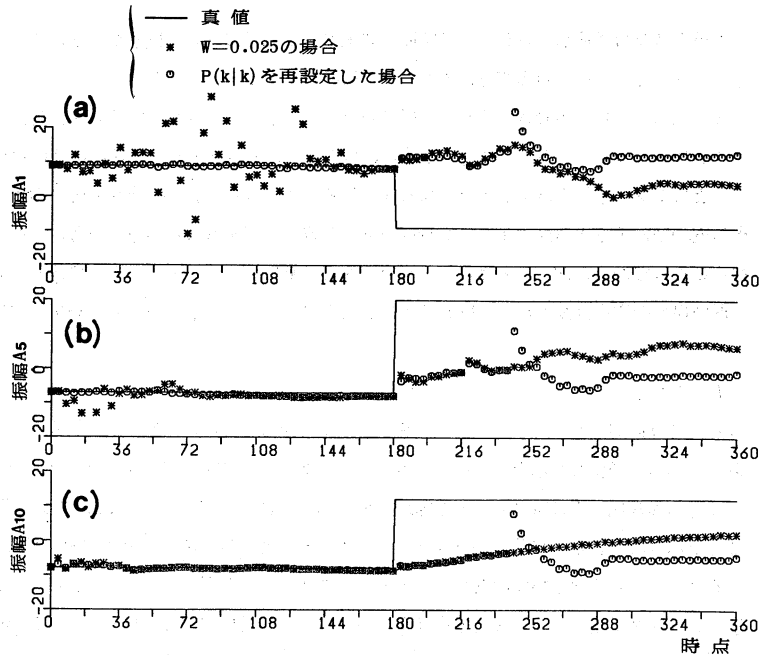


図-8 通常のカルマンフィルターによる振幅の同定結果

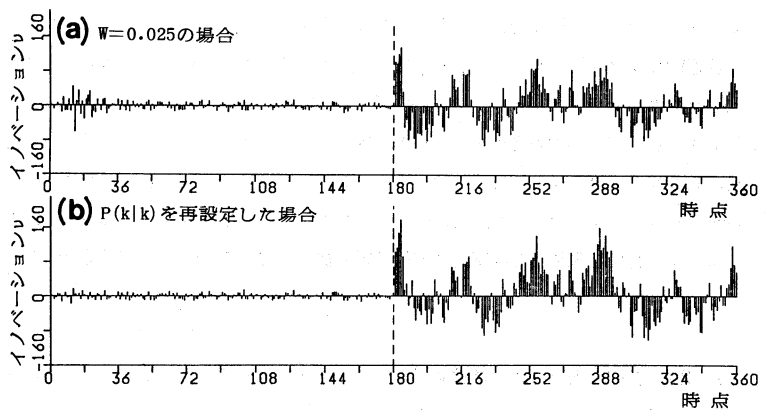


図-9 通常のカルマンフィルターによるイノベーション

この情報放棄は予測値の正確さが高精度で要求される問題においては適切でないことを示している⁹⁾。すなわちAKFでは式(19)と式(20)の両者の修正により、予測精度が向上するといえる。

また式(16)で定義される ϕ_* の根号内は、式(13)で定義される μ が正定値行列であるので正となるが、 μ のランクが不足する場合や μ がフルランクでも l が小さい場合では、ときどき行列計算の誤差のため ϕ_* の根号内が負となる場合が生ずる。このことはランク不足の度合いが大きくなる程生じるようになり、また状態量の修正を行った後によく生ずるようである。この場合は根号内の絶対値をとるか、または前時点の ϕ_* の値で代用するなどの方法が考えられる。 $l=60$ の場合では ϕ_* の根号内が負となることはなかったが、この場合でも μ の行列式の値は $10^{-35} \sim 10^{-62}$ の範囲にある。すなわちこのことは行列式がかなり0に近い場合の逆行列演算などを行わなければならないことを示しているので倍精度演算が望ましいと考えられる。

6. むすび

本報では適応的カルマンフィルターを、10本のかかなり多い周波数成分で構成され20個の未知パラメータを持つ周期関数時系列に異常が発生した場合に適用して検討を行った。その結果、本手法は異常発生時点を的確に検出し、通常のカルマンフィルターに比べ異常発生後の時系列への追従が非常に速く行われ、顕著な予測精度の向上が得られ、非定常時系列の予測に効果的であることが示された。さらに適応的カルマンフィルターの種々の異常値検出特性や一般的特性が明らかにされた。すなわち、

- ① l が n (同定すべき振幅の個数)以上でも、周波数成分が多くなると行列 μ のランクが不足する現象が生ずる。
- ② μ がランク不足のまま一般化逆行列を用いた場合、異常検出時点は早くなるが振幅の同定精度は低く予測誤差も大きくなる。このことはランク不足の度合いが大きくなる程著しくなる。
- ③ 長周期成分の振幅同定では修正当初オーバーシュートが生じ、これは長周期成分に対するもの程大きくなる。
- ④ オーバーシュート期間であっても予測誤差は小さい。
- ⑤ 適応的カルマンフィルターによる異常値系列への速やかな追従は、状態量とその推定誤差共分散の両者の修正によって行われる。
- ⑥ 通常のカルマンフィルターでは $U, W, P(k|k)$ を変えてカルマンゲインを増加させても振幅急変への速やかな追従は難しい。
- ⑦ l が小さくて状態量の修正を行った後には行列計算の誤差により ϕ_* の根号内が負となる場合が時々生ずる。

適応的カルマンフィルターは通常のカルマンフィルターを包含するものであり、通常のカルマンフィルターでは予測誤差が途中から大きくなってゆく場合でも、適応的カルマンフィルターを作動させ、この予測誤差を小さくすることが可能であると考えられる。

なお本研究は、昭和58年度文部省科学研究費、一般研究(C)(研究代表者 上田年比古)の補助を受けた。記して謝意を表す。

参考文献

- 1) 日野, 竹内, 宍戸: 非定常確率過程としての水文現象の解析, 第19回水理講演会論文集, pp. 51~57, 1975年2月.
- 2) 根本順吉: 異常気象を追って, 中央公論社, pp. 27~30, pp. 95~97, 1974年.
- 3) Willsky, A.S., and Jones, H.L.: A Generalized Likelihood Ratio Approach to the Detection and Estimation of Jumps in Linear Systems, IEEE Trans. on A.C., pp. 108-112, February, 1976.
- 4) Kitanidis, P.K., and Bras, R.L.: Adaptive Filtering Through Detection of Isolated Transient Errors to Rainfall-Runoff Models, W.R.R., Vol. 16, No.4, pp. 740-748, August, 1980.
- 5) 上田, 河村, 神野: 適応的カルマンフィルターによる異常値検出について, 土木学会論文報告集投稿中.
- 6) 河村武編: 気候変動の実態, 古今書院, 1980年.
- 7) Sen, Z.: Adaptive Fourier Analysis of Periodic Stochastic Hydrologic Sequences, Journal of Hydrology, No.46, pp. 239-249, 1980.
- 8) 戸川隼人: マトリックスの数値計算, オーム社, pp. 46~50, 1971年.
- 9) 坂和愛幸: 最適システム制御理論, コロナ社, pp. 141~143, 1974年.
- 10) Searle, S.R.: Matrix Algebra Useful for Statistics, John Wiley and Sons, New York, pp. 212-226, 1982.
- 11) G. ストラング: 線形代数とその応用, 産業図書, pp. 151~160, 1978年.
- 12) 石谷久: カルマンフィルターの適用上の問題点, オペレーションズ・リサーチ, pp. 634~639, 1977年11月.