

時系列のシステムパラメータのジャンプ変動の同定

Identification of Abrupt Changes in System Parameters of a Time Sequence

九州大学工学部 正員 上田年比古

九州大学大学院 学生員 河村 明

九州大学工学部 正員 神野健二

1. はじめに

自然現象や生体を包含したより広義のシステムの同定問題を考える場合、システムの特性要素に未知の異常値を含む場合を考慮する必要がしばしばある。例えば、年降水量の時系列にみられる小雨化傾向¹⁾などの気候変動は、降水システムの動特性に異常を生じた結果と考えるとよい場合もあり、この場合システムが変化したとして数学的記述を行う方が、実系をより忠実に表現できると考えられる。さてこのような異常現象は、どのように配慮を行っても事前に予測することは困難である。従ってわれわれとしては、この異常発生以後においてその発生時刻やその大きさを早急に検出し、その後の時系列の推定を精度よく行い、対応策を立てることが望まれる²⁾。

現在、線形推定理論の1つとしてのカルマンフィルターは、広範囲の分野で多くの問題に適用されている。わが国でも、日野氏³⁾が水文流出予測に適用してその有効性を述べているが、現在一般的な手法になりつつある。しかし定常な誤差統計値をもつ通常のカルマンフィルターのフィードバック機構では、システムの動特性の異常による異常値系列への追従は早急には行われず、異常発生後の予測に大きな誤差を生じる。近年、このような動特性に異常値を含むシステムの同定問題を扱う手法として、未知異常値をジャンプ変動としてその動特性に含む形でシステムの記述を行い、カルマンフィルター理論に一般化尤度比検定法を融合させた形で異常発生時刻およびその異常の規模を推定し、システムへの素早い追従を可能にするいわゆる適応的フィルタリング法の研究が盛んになりつつある⁴⁾⁵⁾。Kitanidis and Bras⁵⁾は、河川の降雨流出をオンラインで予測する場合に、この適応的フィルタリング法を用いると予測精度の向上が得られると述べている。なおこの論文では、推定すべきジャンプ変動量がスカラーで表現されており、この変動量がシステムの各特性要素に影響を及ぼす比率が既知である特殊な場合を対象としており一般的ではない。

本報では、適応的フィルタリング法について、推定すべきジャンプ変動量がベクトルである場合の式の誘導過程を示し、次いで推定誤差共分散行列の合理的な修正法および本手法の適用に当たって、計算機の記憶容量を軽減し演算時間を短縮する簡易化された方法を提案し、次に周期関数で表される時系列のシステムパラメータが途中でジャンプ変動する場合を模擬発生させ、このデータに対し、(i)通常のカルマンフィルターによる方法および(ii)適応的フィルタリング法による方法の2通りで、システムパラメータを同定して時系列を予測し、適応的フィルタリング法の有効性、ジャンプ変動検出性能および特性を検討した。

2. 通常のカルマンフィルター⁶⁾⁷⁾

これは(1)式のようなダイナミクスで表わされるシステムの状態量 x を推定するのに適用される理論で、そのシステム状態量は(2)式の観測方程式を通してのみ観測される。

$$\text{システム方程式} : x(k+1) = \Phi(k)x(k) + \Gamma(k)u(k) \quad \dots (1)$$

$$\text{観測方程式} \quad : \quad y(k) = H(k)x(k) + w(k) \quad \dots (2)$$

ここに,

- k : 時点 x : システムの状態ベクトル (n次元ベクトル)
- Φ : 既知の状態遷移行列 (n×n行列) Γ : 既知の変換行列 (n×p行列)
- u : システム雑音。平均0で分散行列 U の独立な正規性白色雑音 (p次元ベクトル)
- y : 観測ベクトル (m次元ベクトル) H : 既知の観測行列 (m×n行列)
- w : 観測雑音。平均0で分散行列 W の正規性白色雑音 (m次元ベクトル)

x の最適推定値は, $\hat{x}(0|0), P(0|0)$ を初期値として与えると, 以下の(3)～(12)式を順次計算して得られる。

$$\hat{x}(k+1|k) = \Phi(k)\hat{x}(k|k) \quad \dots (3)$$

$$\hat{y}(k+1|k) = H(k+1)\hat{x}(k+1|k) \quad \dots (4)$$

$$\tilde{x}(k+1|k) \triangleq x(k+1) - \hat{x}(k+1|k) = \Phi(k)\tilde{x}(k|k) + \Gamma(k)u(k) \quad \dots (5)$$

$$P(k+1|k) \triangleq E[\tilde{x}(k+1|k)\tilde{x}^T(k+1|k)] = \Phi(k)P(k|k)\Phi^T(k) + \Gamma(k)U(k)\Gamma^T(k) \quad \dots (6)$$

$$\nu(k+1) \triangleq y(k+1) - \hat{y}(k+1|k) = H(k+1)\tilde{x}(k+1|k) + w(k+1) \quad \dots (7)$$

$$V(k+1) \triangleq E[\nu(k+1)\nu^T(k+1)] = H(k+1)P(k+1|k)H^T(k+1) + W(k+1) \quad \dots (8)$$

$$K(k+1) = P(k+1|k)H^T(k+1)V^{-1}(k+1) \quad \dots (9)$$

$$\hat{x}(k+1|k+1) = \hat{x}(k+1|k) + K(k+1)\nu(k+1) \quad \dots (10)$$

$$\tilde{x}(k+1|k+1) \triangleq x(k+1) - \hat{x}(k+1|k+1) = \tilde{x}(k+1|k) - K(k+1)\nu(k+1) \quad \dots (11)$$

$$P(k+1|k+1) \triangleq E[\tilde{x}(k+1|k+1)\tilde{x}^T(k+1|k+1)] = [I - K(k+1)H(k+1)]P(k+1|k) \quad \dots (12)$$

ここに,

$\hat{x}(k+1|k)$: k 時点までの観測情報による $x(k+1)$ の最適推定値

$\hat{y}(k+1|k)$: k 時点までの観測情報による $y(k+1)$ の最適推定値

$K(k+1)$: カルマンゲインマトリックス (n×m行列)

$\nu(k+1)$: 1時点先の観測量の予測残差 (イノベーションと呼ばれている) (m次元ベクトル)

T : 転置記号 \triangleq : 定義 I : 単位行列 (n×n行列) $E[\quad]$: 期待値演算

3. 適応的フィルタリング法⁴⁾

これは次式のようなシステム方程式で表されるシステムの状態量を推定するのに適用される手法である。

$$\text{システム方程式: } x(k+1) = \Phi(k)x(k) + \Gamma(k)u(k) + \delta_{k\theta}\delta G(k) \quad \dots (13)$$

ここに,

$\delta_{k\theta}\delta G(k)$: 未知の独立した異常値項 θ : 異常が生じた時点

$\delta G(k)$: k 時点における未知の異常値量としてのジャンプ変動量 (n次元ベクトル)

$\delta_{k\theta}$: クロネッカーのデルタ

(13)式は通常のカルマンフィルターのシステム方程式に異常値項 $\delta_{k\theta}\delta G(k)$ を含んだ形となっている。なおシステム方程式

のジャンプ変動量がスカラーで表される特殊な場合の適応的フィルタリング法については参考文献5), 8)を参照されたい。観測方程式は通常のカルマンフィルターの観測方程式(2)式と同じである。この手法は、一般化尤度比検定法によりシステムの異常発生の有無を観測時系列の変動状況から検定し、もし異常値が検出されればシステムが変化したものと考えて、その発生時点およびその大きさを定量的に推定し、異常値の大きさに応じて状態量を修正するものである。以下に異常値検出から修正までの諸式を示すが、ここでは観測量 $y(k)$ はスカラー ($m=1$) としている。

(13)式は2つの仮説に分けることができる。

仮説 H_0 : 異常値 (ジャンプ変動量) $\delta G(k)$ が発生していない場合。

仮説 H_1 : $k = \theta$ において異常値 (ジャンプ変動量) $\delta G(k)$ が発生している場合。

仮説 H_0 の場合は通常のカルマンフィルターによりシステムの状態量を推定する。一方仮説 H_1 の場合は、システムの線形性よりイノベーション $\nu(\theta+i)$ は以下のように異常値の影響を受けない項 (添字0で表わす仮説 H_0 の下での値) と受ける項とに分離できる。すなわち

$$\nu(\theta+i) = \nu_0(\theta+i) + A(\theta, \theta+i)\delta G(\theta) \quad \dots (14)$$

ここに、

$$A(\theta, \theta+i) \triangleq H(\theta+i)\Psi(\theta, \theta+i) \quad \dots (15)$$

$$\Psi(\theta, \theta+i) \triangleq \begin{cases} \Phi(\theta+i-1)[I-K(\theta+i-1)H(\theta+i-1)]\Psi(\theta, \theta+i-1) & (\text{if } i \geq 2) \\ I & (\text{if } i=1) \\ 0 & (\text{if } i \leq 0) \end{cases} \quad \dots (16)$$

($n \times n$ 行列)

また、イノベーション $\nu(\theta+i)$ の期待値と分散を求めると、

$$E[\nu_0(\theta+i)] = 0 \quad \dots (17)$$

$$E[\nu(\theta+i)] = A(\theta, \theta+i)\delta G(\theta) \quad \dots (18)$$

$$\text{Var}[\nu_0(\theta+i)] = \text{Var}[\nu(\theta+i)] = H(\theta+i)P_0(\theta+i|\theta+i-1)H^T(\theta+i) + W(\theta+i) \triangleq \sigma^2(\theta+i) \quad (19)$$

ここに、 $\text{Var}[\quad]$: 分散

$P_0(\theta+i|\theta+i-1)$: システム状態量に異常がないとする通常のカルマンフィルターの計算ループで求められるシステム状態量の推定誤差共分散行列

ここで、イノベーション $\nu(\theta+i)$ は正規分布をなす $u, w, x(0)$ の線形関数であるから、仮説 H_0, H_1 のいずれの下でも正規分布をなしている。また、 $\nu(\theta+i)$ ($i=1, 2, \dots, l$) は互いに独立であるので、仮説 H_0 の下で一連のイノベーション $\nu(\theta+1), \nu(\theta+2), \dots, \nu(\theta+l)$ が同時に生起する同時確率密度および仮説 H_1 の下で $\delta G(k)$ の大きさの異常値が発生した時の一連のイノベーションの同時確率密度は(17), (18), (19)式に示す平均と分散をもつ正規確率密度の積となり、以下のように求められる。

$$p(\nu(\theta+1), \dots, \nu(\theta+l)|H_0) = \prod_{i=1}^l \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma(\theta+i)} \exp\left[-\frac{\nu^2(\theta+i)}{2\sigma^2(\theta+i)}\right] \quad \dots (20)$$

$$p(\nu(\theta+1), \dots, \nu(\theta+l)|H_1, \delta G(\theta)) = \prod_{i=1}^l \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma(\theta+i)} \exp\left[-\frac{\{\nu(\theta+i) - A(\theta, \theta+i)\delta G(\theta)\}^2}{2\sigma^2(\theta+i)}\right] \quad (21)$$

(20) 式と (21) 式の比を尤度比 $\Lambda(\theta, \delta G(\theta), l)$ と定義すると尤度比は以下ようになる。

$$\Lambda(\theta, \delta G(\theta), l) \triangleq \frac{p(\nu(\theta+1), \dots, \nu(\theta+l) | H_1, \delta G(\theta))}{p(\nu(\theta+1), \dots, \nu(\theta+l) | H_0)}$$

$$= \exp \left[\varphi^T(\theta, l) \delta G(\theta) - \frac{1}{2} \delta G^T(\theta) \mu(\theta, l) \delta G(\theta) \right] \quad \dots (22)$$

ここに、

$$\varphi(\theta, l) \triangleq \sum_{i=1}^l \frac{A^T(\theta, \theta+i) \nu(\theta+i)}{\sigma^2(\theta+i)} \quad (n \text{次元ベクトル}) \quad \dots (23)$$

$$\mu(\theta, l) \triangleq \sum_{i=1}^l \frac{A^T(\theta, \theta+i) A(\theta, \theta+i)}{\sigma^2(\theta+i)} \quad (n \times n \text{行列}) \quad \dots (24)$$

いま (22) 式対数をとり $\delta G(\theta)$ で微分して 0 とおくと $\delta G(\theta)$ の最尤推定値 $\delta \hat{G}(\theta)$ は次のようになる。

$$\delta \hat{G}(\theta) = \mu^{-1}(\theta, l) \varphi(\theta, l) \quad \dots (25)$$

次に (22) 式の $\delta G(\theta)$ に (25) 式を代入すれば、次のように一般化尤度比 $\Lambda_g(\theta, l)$ が得られる。

$$\Lambda_g(\theta, l) \triangleq \Lambda(\theta, \delta \hat{G}(\theta), l) = \exp \left[\frac{1}{2} \varphi^T(\theta, l) \mu^{-1}(\theta, l) \varphi(\theta, l) \right] \quad \dots (26)$$

(26) 式がある閾値よりも大きければ仮説 H_1 を受容し、小さければ仮説 H_0 を受容することになる (一般化尤度比検定法)。

ここでは (26) 式を変形した次の (27) 式で定義される $\varphi_*(\theta, l)$ と閾値 η の大小を比較し、異常発生の有無を検定する。以後 $\varphi_*(\theta, l)$ を異常検出指標と呼ぶことにする。

$$\varphi_*(\theta, l) \triangleq \sqrt{2 \ln \Lambda_g(\theta, l)} = \sqrt{\varphi^T(\theta, l) \mu^{-1}(\theta, l) \varphi(\theta, l)} \quad (\text{スカラー}) \quad \dots (27)$$

$$\varphi_*(\theta, l) \begin{matrix} \geq \eta \\ H_1 \\ H_0 \end{matrix} \quad \dots (28)$$

以上の方法で異常発生を検定およびその大きさの推定を行うことができる。ここで、異常発生時点の最尤推定値 $\hat{\theta}$ を求めるには、

(26) 式一般化尤度比従って (27) 式を最大にする時点 θ を求め、これを $\hat{\theta}$ とすればよい。

$$\hat{\theta} = \max_k \Lambda_g(k, l) = \max_k \varphi_*(k, l) \quad \dots (29)$$

さて (29) 式による異常発生時点の推定値 θ の算定法について述べよう。図-1 のように、 θ で異常が発生すると、 $\theta+1$ 時点より観測値 (実線) が予測とはずれた大きな変化を生じ、通常のカルマンフィルターによる予測値 (破線) は $\theta+1$ 時点より大きくはずれが、次第に観測値に追従するようになる。従って、観測値と予測値との差 ν (×印) は $\theta+1$ 時点より大きくなり、それ以後漸減する傾向にある。いま θ より手前の現時点 k_1 に対するそれより手前の各時点の φ_* は (23)、(27) 式に示すように、時点 1 の φ_* は $1 \sim k_1$ の ν の和から、時点 1 の ○印のように求められ、同様に 2, 3, ... の各時点の φ_* が ○印のように得られる。現時点 k_1 が進行すればそれに対する 1, 2, ... 時点の φ_* は新しい ν が入力されるので、改めて算定することになる。こうして θ 以後のある現時点 k_2 に対する各時点の φ_* が ●印のようにえられ、 $\theta+1$ 時点から ν が大きくなることから、 θ 時点で φ_* が最も大きくなりそれ以後 ν の減少に応じて φ_* は漸減する傾向にある。このような φ_* が最大になる時点をとらえ、この値が η より大となれば、 θ を異常発生時点と判定することになる。この計算では現時点 k の進行につれ、各時点の φ_* を改めて計算し直さなければならず、また求めるべき φ_* の個数も増大してゆくの、現時点に対して求めるべき φ_*

の個数を k の進行と共に増大させず一定数にするために、 φ_* を求める時点 i を $k - N_1 \leq i \leq k - N_2$ (N_1, N_2 は定数) の範囲に固定し、 k の進行につれて、 $k - N_1$ より前の時点の φ_* の計算をおとして行く方法がとられている⁴⁾⁵⁾。しかしそれでもその範囲内の φ_* は時点の進行と共に計算をし直さなければならず、かなり計算量は多くなる。本報は、現時点 k に対して φ_* 算定の時点 $k - \ell$ (ℓ : データ

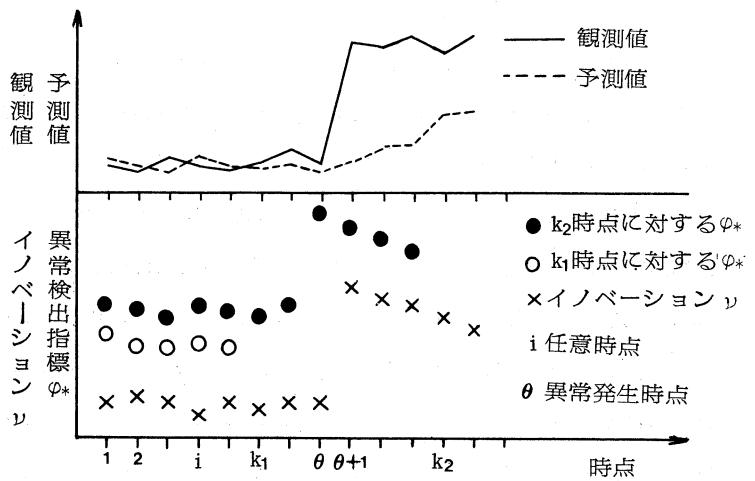


図-1 異常発生時点推定の模式図

蓄積個数で一定にとる) の 1 時点だけにし、これをそれ以前の k に対する φ_* の最大と比較し、大きい方を残しながら、 k を進めてゆけば、 φ_* の最大がえられるので、これが η より大であれば、この φ_* 最大の時点 θ を異常発生時点 θ とする。この算定法によれば、 k の進行により、同じ時点の φ_* を繰り返し計算する必要がなく、しかも現時点 k で計算する φ_* は 1 個であるので、計算がかなり簡易化される。なお、 ℓ を固定することは (20), (21), (22) 式の統計的性質がデータ蓄積個数 ℓ の増減に関係しないことから許容される。以上のようにして θ が求まれば、これを (25) 式の θ として代入すれば $\delta \hat{G}(\theta)$ が求められる。

さて、一般化尤度比検定法により異常が検出、同定されると、これに対してフィルターを適応させるために状態量を次の (30) 式のように修正する。新しく修正されたものに添字 *new*, 修正前のものに添字 *old* をつけると、

$$\hat{x}_{new}(\theta+i|\theta+i) = \hat{x}_{old}(\theta+i|\theta+i) + \Delta(\theta, \theta+i) \delta \hat{G}(\theta) \quad \dots (30)$$

ここに、

$$\Delta(\theta, \theta+i) \triangleq [I - K(\theta+i)H(\theta+i)] \Psi(\theta, \theta+i) \quad (n \times n \text{ 行列}) \quad \dots (31)$$

$\hat{x}_{old}(\theta+i|\theta+i)$: 通常のカルマンフィルターによる修正前の $(\theta+i)$ 時点におけるシステム状態量の最適推定値

次に、 $\delta \hat{G}(\theta)$ の推定誤差を加味した $\hat{x}_{new}(\theta+i|\theta+i)$ の推定誤差共分散行列として、本報では新たに、理論式から誘導した次式を用いることにする。なお、これらはオフラインで計算できる。

$$P_{new}(\theta+i|\theta+i) = P_0(\theta+i|\theta+i) + \Phi^*(\theta, \theta+i) \mu^{-1}(\theta, \ell) \Phi^{*T}(\theta, \theta+i) \quad \dots (32)$$

ここに、

$$\Phi^*(\theta, \theta+i) \triangleq \begin{cases} \Phi(\theta+1)\Phi(\theta+2) \cdots \Phi(\theta+i-1) & (\text{if } i \geq 2) \\ I & (\text{if } i=1) \\ 0 & (\text{if } i \leq 0) \end{cases} \quad \dots (33)$$

4. 計算例

本手法の妥当性、有効性および特性を示す例として、次式のような周期関数で表される時系列のシステムパラメーターが途中でジャンプ変動する場合を模擬発生させ、この時系列のデータに本手法を適用して検討してみよう。

$$y(k) = A \sin 2\pi f k + B \cos 2\pi f k + w(k) \quad \dots (34)$$

ここに,

k : 時点 A, B : 振幅 f : 周波数 w : 平均 0 の正規性白色雑音

なお, この時系列モデルの採用にあたっては Sen の研究⁴⁾を参考にした。ここで, $f=1/36$ とし, w には $N(0, 0.5^2)$ の正規乱数を与え, $k=72$ 時点で異常が発生したとして, $k \leq 72$ で $A = 10.0, B = 5.0, k \geq 73$ で $A = 5.0, B = 10.0$ と振幅を変化させて, 時系列を 180 ステップ程度模擬発生させた。これは $\theta = 72$ とし, $\delta G(\theta) = [-5.0 \ 5.0]^T$ の大きさの異常を発生させたことになる。なお, この場合の異常は振幅は変化せず, 位相だけが変わることになる。(34) 式の周波数 f は既知として振幅 A, B を同定し, カルマンフィルターにより時系列 $y(k)$ の予測を行う場合を考えると, これは

(1) 式のシステム状態量 $x(k) = [A \ B]^T, \Phi(k) = I$, (2) 式の観測行列 $H(k) = [\sin 2\pi f k \ \cos 2\pi f k]$ とする場合に相当する。システム雑音の分散 $U = 0$, 観測雑音の分散 $W = 0.25$, 適応的フィルタリング法のデータ蓄積個数 $\ell = 2$, 閾値 $\eta = 4.0$ として通常のカルマンフィルターと適応的フィルタリング法での 1 ステップ先の予測値を図-2 に示す。また, それぞれの手法による 1 ステップ先の予測残差 (イノベーション) を図-3, 4 に, 異常検出指標 $\phi_*(k, \ell)$ の値を図-5 に, 振幅 A, B の同定結果を図-6 に, 適応的フィルタリング法で $\ell = 10$ の場合の異常検出指標の値を図-7 に示す。

5. 考察

図-2, 3, 6 より通常のカルマンフィルターではシステムパラメータのジャンプ変動をとらえることができず, システムパラメータの同定結果に大きな誤差を生じている。このため異常値系列にゆっくりとしか追従できず, 大きな予測誤差を生じている。これに対し, 適応的フィルタリング法では $\hat{\theta} = 72, \delta \hat{G}(\hat{\theta}) = [-3.0 \ 4.4]^T$ とジャンプ変動を検出し, 状態推定量およびその推定誤差共分散行列を修正したので, 図-2, 4, 6 に示すように異常システムパラメータが速やかに同定され, 異常値系列によく適合し, 予測残差もかなり小さくなっている。この場合ジャンプ変動量が若干小さめに推定されているが, これは本計算例ではデータ蓄積個数 ℓ (ℓ は (25), (27) 式の $\mu(\theta, \ell)$ の逆行列の計算が可能ないように選ぶ必要があり, ここでは観測量がスカラーであるので, システム状態量の次元 n (この場合 2) 以上でなければならない。) をその最小の 2 として検定を行っているので, 検出精度が若干低くなるためと考えられる。例えば $\ell = 10$ とした場合 $\delta \hat{G}(\hat{\theta}) = [-5.2 \ 4.7]^T$ のジャンプ変動が検出され, $\ell = 2$ のときより検出精度は向上する。このように一般に ℓ を大きくすると検出精度は向上する傾向にある。しかし, ジャンプ変動量の推定に若干の誤差があっても, この推定の不正確さを補うために計算過程において推定誤差分散行列がその分大きくなるので, 推定誤差は, 図-6 から分るようにすぐに補償され, それ以後の予測値の精度にはあまり影響しないようである。また, ℓ を大きくすると異常検出の時点がデータ蓄積に要する時点分遅れるので, それらの利点欠点を考慮して ℓ を決定する必要がある。なお, 本計算例のように雑音が比較的小さい場合には ℓ を最低個数 (この場合 2) に選んでも十分であることが計算結果からいえるようである。時系列に加わる雑音の影響については, 雑音が大きくなる程, 異常発生の影響による異常検出指標のピークと雑音の影響による異常検出指標の値との差が縮まり, 異常発生を検出するのが難しくなる。また検出できてその異常の推定精度は低下する。雑音が余りに大きいと, 異常発生による異常検出指標のピークは雑音の影響によるその中に埋もれてしまい, 異常を検出することが不可能となる。この場合でも ℓ を大きくすると図-7 のように異常発生による異常検出指標のピークが高くなり, 相対的に雑音の影響が小さくなるので検出精度は向上することになる。

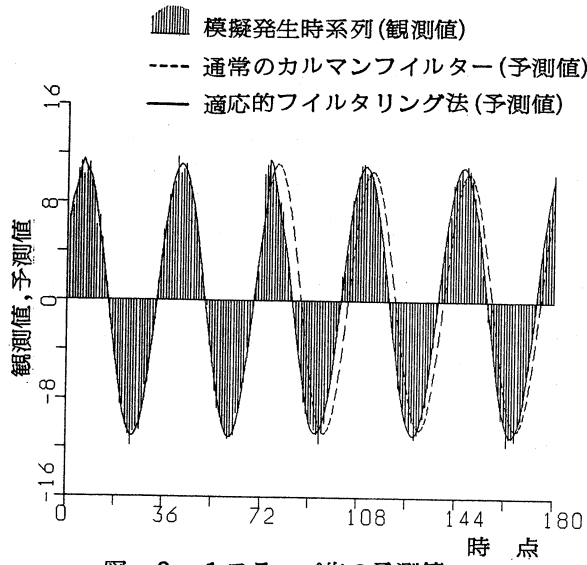


図-2 1ステップ先の予測値

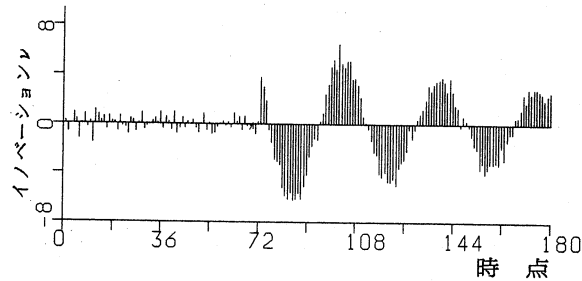


図-3 通常のカルマンフィルターによるイノベーション

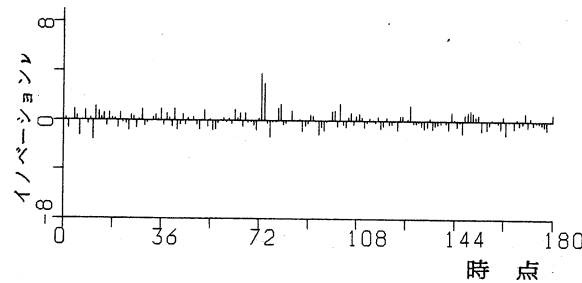


図-4 適応的フィルタリング法によるイノベーション

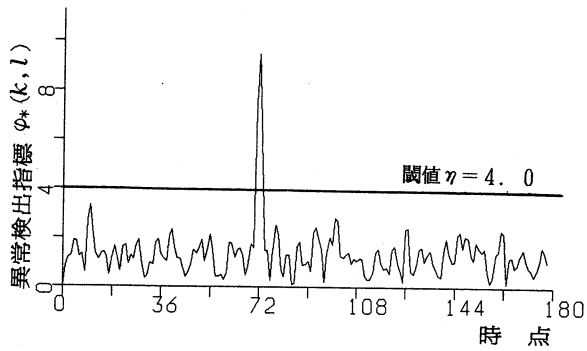


図-5 $l = 2$ の場合の異常検出指標の値

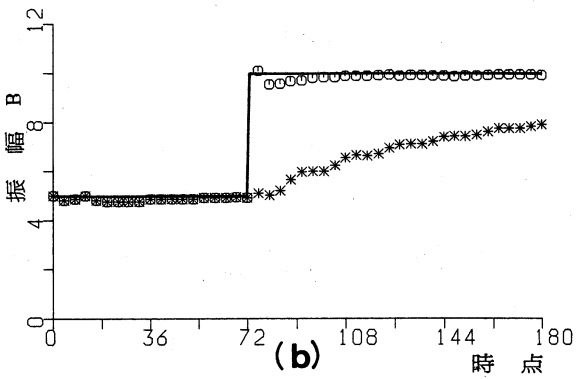
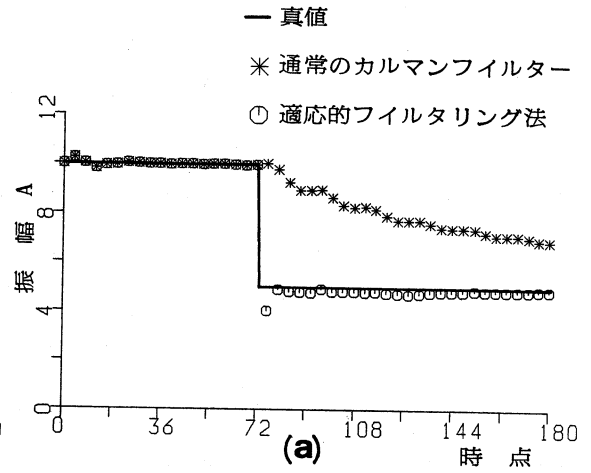


図-6 振幅A,Bの同定結果

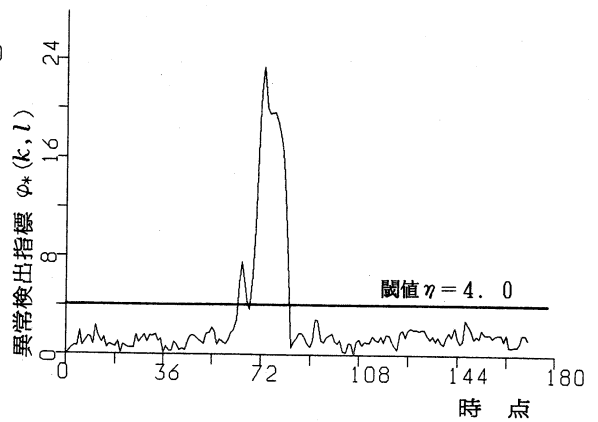


図-7 $l = 10$ の場合の異常検出指標の値

6. むすび

本報では、適応的フィルタリング法について、推定すべき変動量がベクトルである場合の式の誘導過程を示すと共に、推定誤差共分散の合理的な修正式を示し、さらに本手法の適用に当たって実用的な簡易化された方法を提案した。次に本手法を、時系列を構成しているシステムパラメーターの動特性がジャンプ的に変動する場合に適用した結果、通常のカルマンフィルターに比べ、かなり予測精度の向上が得られ、本手法の有効性と特性が明らかにされた。適応的フィルタリング法は通常のカルマンフィルターを包含するものであり、通常のカルマンフィルターでは予測誤差が局所的に発散してしまう場合でも適応的フィルタリング法を作動させることによりこの発散を防ぐことが可能である。このように本手法はシステムに予期し得ない突発的異常が生じた場合の速やかな同定およびそれ以後の時系列の予測に有効な手法であると考えられる。

参考文献

- 1) 山本義一編：気候変動，東京大学出版会，pp. 32~42，1979年。
- 2) 計測自動制御学会編：異常検出予測シンポジウム報文集，1978年11月。
- 3) 日野幹雄：水文流出系予測へのカルマン・フィルター理論の適用，土木学会論文報告集，第221号，pp. 39~47，1974年1月。
- 4) Willsky, A.S., and Jones, H.L.: A Generalized Likelihood Ratio Approach to the Detection and Estimation of Jumps in Linear Systems, IEEE Trans. on A.C., pp.108-112, February, 1976.
- 5) Kitanidis, P.K., and Bras, R.L.: Adaptive Filtering Through Detection of Isolated Transient Errors to Rainfall-Runoff Models, W.R.R., Vol.16, No.4, pp.740-748, August, 1980.
- 6) 有本 卓：カルマン・フィルター，産業図書，1977年。
- 7) 日野幹雄：Kalmanの予測推定理論の平易な誘導について，東工大土木工学科研究報告，No. 15, pp. 91~99，1973年12月。
- 8) 上田，神野，河村，高吉：異常値を含む時系列の異常値検出と予測について，第2回水資源に関するシンポジウム前刷集，pp. 473~478，1982年8月。
- 9) Sen, Z.: Adaptive Fourier Analysis of Periodic Stochastic Hydrologic Sequences, Journal of Hydrology, No.46, pp.239-249, 1980.