測度論 (ルベーグ積分)

京都大学　澤野嘉宏

Contents

Abstract. リーマン積分はある意味で不完全で繊細なものである．解析学を深く理解するためには解析学の決定的な積分理論として，我々は統合された新たな枠組み，つまりルベーグ積分の理論を必要とする．したがって，我々は最小限の理論を導入してルベーグ積分の理論と次の基本的な定理を与える．
(1) 単調収束 定理 (定理 2.6)，ファトゥの補題 (定理 2.8)，ルベーグの収束定理 (定理 2.12).
(2) フビニの定理 (定理 2.21).
短いが，自己完結を目指す.

1. n 次元ルベーグ測度

1.1. **可測集合の定義とルベーグ測度.** 可測という単語に出くわした場合読者は『その集合の面積，体積が決定できる』と理解してほしい．重要であるのは私たちは何を測定するかではなく，どのように測定することである．実際に，$\mathbb{R}^n$ の内のすべての部分集合をすべてを満足に測定するのは不可能であるとあきらめざるを得ない．σ -代数，特に，ボレル σ -代数なにを測定するのか決定するのに重要な役割を果す.

ルベーグ積分論において，可算集合というものは極めて重要なものであるので，ここに定義とよく使う例を挙げておこう.

定義 1.1 (可算集合)**.** 無限集合 E が可算であるとは写像 $\varphi : \mathbb{N} \to E$ が存在して，$\varphi(\mathbb{N}) = E$ となることである.

例 1.2. $\{0, 1, 2, \cdots\}$，$\mathbb{Z}$，$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(i, j) : i, j \in \mathbb{N}\}$ は可算である.

積分とは，いろいろな図形の面積，体積を測るという側面もあるが，直方体はそのような図形の中で一番基本的な図形である.

定義 1.3 (直方体とその体積)**.** $2n$ 個の実数 $-\infty < a_j \le b_j < \infty$, $(j = 1, 2, \cdots, n)$ を用いて $\displaystyle\prod_{j=1}^n [a_j, b_j) = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \cdots [a_n, b_n)$ と表せる集合全体を $\mathcal{R}$ と表す．これを直方体という.
直方体の体積は $\displaystyle\left|\prod_{j=1}^n [a_j, b_j)\right| = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$ と定める.

$n = 1$ のときは体積のことを長さといい，$n = 2$ のときは体積のことを面積という.

直方体を用いて，長さ，面積，体積を測るためのルベーグ外測度を定義しよう.

定義 1.4 (ルベーグ外測度)**.** $A \subset \mathbb{R}^n$ とする．ルベーグ外測度 $m^*(A)$ とは

$$m^*(A) := \inf\left\{\sum_{j=1}^\infty |R_j| : \text{各 } R_j \text{ は直方体で}, A \subset \bigcup_{j=1}^\infty R_j\right\} \tag{1.1}$$

で与えられる量である.

m^* は集合を数に変換するものである．このような性質をもつものを集合関数という.

次のことは直感的には明らかであろう.

補題 1.5. R を直方体とするとき，$m^*(R) = |R|$ が成り立つ.

証明. 一般に，S を中心を保ったまま k 倍に相似拡大して得られる直方体を kS を書くことにする．

定義より，$m^*(R) \leq |R|$ は明らかである．仮に，$m^*(R) < |R|$ と仮定すると，

$$\sum_{j=1}^{\infty} |R_j| < |R|,\ R \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j$$

を満たしている立方体の列 $\{R_j\}_{j=1}^{\infty}$ が取れる．すると，ある $\varepsilon \in (0,1)$ が存在して，

$$\sum_{j=1}^{\infty} |(1+\varepsilon)R_j| < |(1-\varepsilon)R|$$

である．$\overline{(1-\varepsilon)R}$ はコンパクトで，$\{\mathrm{Int}(1+\varepsilon)R_j\}_{j=1}^{\infty}$ はその開被覆であるから，ある N が存在して，

$$\overline{(1-\varepsilon)R} \subset \bigcup_{j=1}^{N} \mathrm{Int}((1+\varepsilon)R_j),\ \sum_{j=1}^{N} |(1+\varepsilon)R_j| < |(1-\varepsilon)R|$$

が成り立つ．$\{(1+\varepsilon)R_j\}_{j=1}^{\infty}$ が重なっているかもしれないことからもわかるようにこれは矛盾している． □

定義から次のことがわかる．

補題 1.6. 集合関数 m^* は σ-劣加法的，つまり $j = 1, 2, \cdots$ に対して部分集合 $A_j \subset \mathbb{R}^n$ が与えられた時に，$m^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j)$ が成り立つ．

証明. 背理法で証明しよう．結論を否定するとわかるように $\varepsilon > 0$ が存在して，

$$m^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) > \varepsilon + \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j) \tag{1.2}$$

となる．$m(A_j)$ の定義で，各 $j \in \mathbb{N}$ に対して，長方形の集まり (列) $\{R_{jk}\}_{k\in\mathbb{N}}$ で，

$$A_j \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} R_{jk},\ m^*(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j} \geq \sum_{k\in\mathbb{N}} |R_{jk}| \tag{1.3}$$

を満たすものが存在する．これらの長方形 $R_{j,k}$, $j, k \in \mathbb{N}$ を用いて

$$\varepsilon + \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j) < m^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} |R_{jk}|\right) \leq \varepsilon + \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j), \tag{1.4}$$

が得られるが，これは矛盾である． □

直方体をいくつかに分割して考えればわかるように，R_1 と R_2 が共通部分を持たないならば，

$$m^*(R_1 \cup R_2) = m^*(R_1) + m^*(R_2)$$

が成り立つ．このような性質

$$E_1 \text{と } E_2 \text{が互いに交わらないとき}, m^*(E_1 \cup E_2) = m^*(E_1) + m^*(E_2)$$

は別に E_1 と E_2 が別に直方体のときだけに限らず，円などのほかの図形でもよいはずである．ところが，このような性質や“ よい ”集合をどのように記述するのかに関して情報がない．アンリールベーグ (Henri Lebesgue) はこの条件をもう少し広げて考えることが重要であると考えた．

$$\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \text{が互いに交わらないとき}, m^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} m^*(E_j)$$

“ よい ”集合が持っていないといけない性質を定義することから始める．以後，このよいボレル (Borel) 集合を可測集合という．(ボレルは人名である．)

定義 1.7. ボレル集合とは，以下の条件を満たす $\mathbb{R}^n$ の性質 $\mathcal{P}$ をすべて満たしているような集合である．

(1) $\mathbb{R}^n$ 自体は性質 $\mathcal{P}$ を満たしている．
(2) 長方形はすべて性質 $\mathcal{P}$ を満たしている．
(3) $\mathbb{R}^n$ の部分集合 A が性質 $\mathcal{P}$ を満たしていれば，その補集合 A^c も性質 $\mathcal{P}$ を満たしている．
(4) $\mathbb{R}^n$ の部分集合 A, B が性質 $\mathcal{P}$ を満たしていれば，それらの和集合 $A \cup B$ も性質 $\mathcal{P}$ を満たしている．
(5) $\mathbb{R}^n$ の互いに交わらない部分集合の列 $A_1, A_2, \cdots, A_j, \cdot$ が性質 $\mathcal{P}$ を満たしていれば，それらの和集合 $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ も性質 $\mathcal{P}$ を満たしている．

ここで，ポイントとなるのは性質 $\mathcal{P}$ が何かがわからないことである．ここでは，性質 $\mathcal{P}$ の例として,『$\mathcal{P}$ は $\mathbb{R}^n$ の部分集合である.』という性質が挙げられることを指摘しておくにとどめる．性質 $\mathcal{P}$ というのは一般にはわかりにくいかもしれないが，$\mathbb{R}^n$ の部分集合全体から，集合 $\{T, F\}$ への写像 $\mathcal{T}$ で，次の条件を満たしているものと考えてもよいであろう．

(1) $\mathcal{T}(\mathbb{R}^n) = T$.
(2) 直方体 R に対して，$\mathcal{T}(R) = T$.
(3) $A \subset \mathbb{R}^n$ が $\mathcal{T}(A) = T$ ならば，$\mathcal{T}(A^c) = T$ が成り立つ．
(4) $A, B \subset \mathbb{R}^n$ が $\mathcal{T}(A) = \mathcal{T}(B) = T$ ならば，$\mathcal{T}(A \cup B) = T$ が成り立つ．
(5) $A_1, A_2, \cdots$ を $\mathbb{R}^n$ の互いに交わらない部分集合の列として，$\mathcal{T}(A_j) = T$ が $j = 1, 2, \cdots$ に対して成り立つならば，$\mathcal{T}\left(\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = T$ が成り立つ．

定義から次のことは明らかである．

命題 1.8. $\mathbb{R}^n$ の性質 $\mathcal{P}$ が次の条件を満たしているとする．

(1) $\mathbb{R}^n$ 自体は性質 $\mathcal{P}$ を満たしている．
(2) 長方形はすべて性質 $\mathcal{P}$ を満たしている．
(3) $\mathbb{R}^n$ の部分集合 A が性質 $\mathcal{P}$ を満たしていれば，その補集合 A^c も性質 $\mathcal{P}$ を満たしている．
(4) $\mathbb{R}^n$ の部分集合 A, B が性質 $\mathcal{P}$ を満たしていれば，それらの和集合 $A \cup B$ も性質 $\mathcal{P}$ を満たしている．
(5) $\mathbb{R}^n$ の互いに交わらない部分集合の列 $A_1, A_2, \cdots, A_j, \cdot$ が性質 $\mathcal{P}$ を満たしていれば，それらの和集合 $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ も性質 $\mathcal{P}$ を満たしている．

このとき，ボレル集合は性質 $\mathcal{P}$ を満たしている．

命題 1.9.

(1) $\mathbb{R}^n$ はボレル可測である．
(2) A がボレル可測であるなら，A^c もボレル可測である．
(3) A, B がボレル可測であるなら，$A \cup B$ もボレル可測である．

(4) $\mathbb{R}^n$ の互いに交わらない部分集合の列 $A_1, A_2, \cdots, A_j, \cdot$ がボレル可測であるなら，$\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ もボレル可測である．

証明. $\mathbb{R}^n$ がボレル可測であることの証明をしよう．他の証明も同じである．命題 1.8 にあるような性質 $\mathcal{P}$ があったとする．すると，$\mathbb{R}^n$ は性質 $\mathcal{P}$ を満たしているから，ボレル集合の定義によって，$\mathbb{R}^n$ はボレル可測である． □

ボレル可測性に関してもう少し調べておこう．

命題 1.10.

(1) $\emptyset$ はボレル可測集合である．
(2) A, B がボレル可測であるなら，$A \cup B$ もボレル可測である．
(3) $\mathbb{R}^n$ の互いに交わらない部分集合の列 $A_1, A_2, \cdots, A_j, \cdot$ がボレル可測であるなら，$\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ もボレル可測である．
(4) 開集合，閉集合はボレル可測である．

証明.

(1) $\emptyset = (\mathbb{R}^n)^c$ より明らかである．
(2) $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$ より明らかである．
(3) $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \cap ({A_{j-1}}^c \cap \cdots {A_1}^c)$ より明らかである．
(4) U を開集合とする．$x \in U$ とすると，x を含む長方形が存在する．長方形の端点の座標はすべて有理数であるとしてよい．したがって，U は可算個の長方形の合併として書かれる．よって，(3) より U はボレル可測である．閉集合の補集合は開集合であるから，閉集合はボレル可測である．

□

以後，ボレル可測集合 A に対して，$m^*(A) = m(A)$ と $*$ を外して書くことにする．

命題 1.11. 全てのボレル集合 A, B に対して，$m(A) = m(A \cap B) + m(A \cap B^c)$ が成り立つ．

証明. $\mathbb{R}^n$ の部分集合 B が性質 $\mathcal{P}$ を満たしているということをすべてのボレル可測集合 A に対して，$m(A) = m(A \cap B) + m(A \cap B^c)$ が成り立つと定義する．このとき，この性質 $\mathcal{P}$ が命題 1.8 にある条件を満たす．

長方形の補集合も可算個の長方形の互いに交わらない和として表されるから，長方形はみな性質 $\mathcal{P}$ を満たしている．$m(\emptyset) = 0$ であるから，$\mathbb{R}^n$ は $\mathcal{P}$ を満たしている．さらに，性質 $\mathcal{P}$ の定義から，B が性質 $\mathcal{P}$ を満たすことと B^c が性質 $\mathcal{P}$ を満たすことは同値であるのは明らかである．

性質 $\mathcal{P}$ を満たす B_1, B_2 に対して，$B_1 \cup B_2$ も性質 $\mathcal{P}$ を満たすことを示そう．定義に従って，

$$
\begin{aligned}
& m(A \cap (B_1 \cup B_2)) + m(A \cap (B_1 \cup B_2)^c) \\
&= m((A \cap B_1) \cup (A \cap B_2 \cap {B_1}^c)) + m(A \cap (B_1 \cup B_2)^c) && (1.5) \\
&\le m(A \cap B_1) + m(A \cap B_2 \cap {B_1}^c) + m(A \cap {B_1}^c \cap {B_2}^c) && (1.6) \\
&\le m(A \cap B_1) + m(A \cap {B_1}^c) = m(A) \le m(A \cap (B_1 \cup B_2)) + m(A \cap (B_1 \cup B_2)^c) && (1.7)
\end{aligned}
$$

となる．ここで，次のことを用いている．

(1) (1.5) の導出には $A \cap (B_1 \cup B_2) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2 \cap {B_1}^c)$ を用いた．
(2) (1.6) は補題 1.6 より従う．
(3) (1.7) の左側の不等式 は $A \cap {B_1}^c$ と B_2 は性質 $\mathcal{P}$ を満たすことよりわかる．等号 (1.7) は A と B_1 はボレル集合であることより従う．(1.7) の右側の不等式は補題 1.6 より従う．

結果として，$B_1 \cup B_2$ も性質 $\mathcal{P}$ を満たすことを示された．B が性質 $\mathcal{P}$ を満たすならば，B^c が性質 $\mathcal{P}$ を満たすので，ボレル集合 $B_1 \cup B_2 = ({B_1}^c \cap {B_2}^c)^c$ も性質 $\mathcal{P}$ を満たす．

もし，性質 $\mathcal{P}$ を満たしている $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ が互いに交わらないならば，$\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ を性質 $\mathcal{P}$ を満たすことを示そう．少なくとも $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_N$ は性質 $\mathcal{P}$ を満たすから，

$$m\left(A \cap \bigcup_{j=1}^{N} B_j\right) = \sum_{j=1}^{N} m(A \cap B_j) \tag{1.8}$$

となる．よって，

$$\sum_{j=1}^{\infty} m(A \cap B_j) = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} m(A \cap B_j) = \lim_{N\to\infty} m\left(\bigcup_{j=1}^{N} A \cap B_j\right) \le m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A \cap B_j\right) \tag{1.9}$$

が得られる．ここで，再び補題 1.6 より，逆側の不等式が得られる．以上より，

$$\sum_{j=1}^{\infty} m(A \cap B_j) = m\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right)\right). \tag{1.10}$$

となる．ここで，$C = \left(\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right)^c$ とすると，(1.10) より，

$$m(A) \le m\left(A \cap C\right) + m\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right)\right) = m\left(A \cap C\right) + \sum_{j=1}^{\infty} m(A \cap B_j) \tag{1.11}$$

となる．ここで，$\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} m(A \cap B_j) = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} m(A \cap B_j)$, だから，補題 1.6 によって

$$\begin{aligned} m(A) &= m\left(A \cap C\right) + \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} m(A \cap B_j) \\ &\le \lim_{N\to\infty} m\left(\left\{A \cap \bigcup_{j=1}^{N} B_j\right\} \cup \left\{A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right)^c\right\}\right) \end{aligned} \tag{1.12}$$

となる．最右辺は明らかに $m(A)$ 以下である．よって，(1.12) における $\le$ は実際には等号である．したがって，$\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ は性質 $\mathcal{P}$ を満たす．命題 1.8 よりボレル集合はみな $\mathcal{P}$ を満たす． □

定理 1.12 (σ-加法性)．集合関数 m は σ-加法的である．つまり，$\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ が互いに交わらないボレル集合の列ならば，

$$\sum_{j=1}^{\infty} m(E_j) = m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \tag{1.13}$$

となる．

証明. ボレル集合はみな $\mathcal{P}$ を満たすので，(1.10) で $A = \mathbb{R}^n$, $B_j = E_j$, $j \in \mathbb{N}$ とすればよい． □

ルベーグ測度の重要な性質をまとめておこう．

系 1.13. $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ がボレル集合の (包含関係に関しての) 増大列であるならば，

$$\lim_{j\to\infty} m(B_j) = m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) \tag{1.14}$$

となる．

証明. $j \in \mathbb{N}$ に対して，$C_j = \begin{cases} B_1 & (j=1) \\ B_j \setminus B_{j-1} & (j \geq 2) \end{cases}$ とおくと，B_j の分割 $\{C_k\}_{k=1}^{j}$ が得られる．よって，

$$\lim_{j\to\infty} m(B_j) = \lim_{j\to\infty} m(C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_j) = \lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{j} m(C_k) \tag{1.15}$$

となる．m の σ-加法性と集合の等式 $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ によって

$$\lim_{j\to\infty} m(B_j) = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k\right) = m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right). \tag{1.16}$$

となる． □

系 1.14. ボレル集合列 $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ がもし

$$m(A_1) < \infty,\ A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_j \supset \cdots \tag{1.17}$$

を満たすならば，$\displaystyle\lim_{j\to\infty} m(A_j) = m\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right)$ となる．

各 $j \in \mathbb{N}$ に対して，$A_j = (j, \infty)$ とすればわかるように，(1.17) における条件 $m(A_1) < \infty$ は外せない．

証明. $m(A_1) < \infty$ だから，

$$m(A_1) - m\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = m\left(A_1 \setminus \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) \tag{1.18}$$

となる．よって，$D_j = A_1 \setminus A_j$ とおけば，仮定と系 1.13 より，

$$m(A_1) - m\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} D_j\right) = \lim_{j\to\infty} m(D_j) = m(A_1) - \lim_{j\to\infty} m(A_j) \tag{1.19}$$

となる．移行すると結論が得られる． □

1.2. **可測関数.** ここでは，積分を定義できるような関数を考察する．

定義 1.15 (可測関数，単純関数)**.**

(1) 関数 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ がボレル可測であるとは，すべての $\lambda > 0$ に対して，
$$\{f > \lambda\} = f^{-1}((\lambda, \infty)) = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, f(x) > \lambda\}$$
がボレル可測集合となることである．

(2) $a_1, a_2, \cdots, a_N \in \mathbb{R}$ と互いに交わらない測度有限なボレル可測集合の有限列 $\{E_j\}_{j=1}^N$ を用いて $f = \displaystyle\sum_{j=1}^N a_j \, \chi_{E_j}$ と表せる関数 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を単純関数という．このような表し方を (ここでは)f の許容表現という．

補題 1.16. 次の性質が成り立つ．

(1) f を可測とするとき，$\{f < \lambda\}$ はボレル可測集合である．
(2) 連続関数は可測である．
(3) f, g を可測関数列とするとき，$f+g, fg$ はボレル可測である．
(4) $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ を可測関数列とするとき，$\displaystyle\sup_{n\in\mathbb{N}} f_j$ はボレル可測である．

証明.

(1) $\{f < \lambda\} = \displaystyle\bigcup_{n=1}^\infty \{f \le \lambda - n^{-1}\} = \bigcup_{n=1}^\infty \{f > \lambda - n^{-1}\}^c$ であることより明らかである．

(2) f を連続関数とすると，$\{f > \lambda\}$ は開集合であるから，ボレル可測集合である．

(3) $\lambda \in \mathbb{R}$ とすると，$\{f+g > \lambda\} = \displaystyle\bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \{f > q\} \cap \{g > \lambda - q\}$ が成り立つ．よって，$f+g$ は可測である．

また，h を可測とするとき，$\{h^2 > \lambda\} = \begin{cases} \{h > \sqrt{\lambda}\} \cup \{h < -\sqrt{\lambda}\} & (\lambda \ge 0) \\ \mathbb{R} & (\lambda < 0) \end{cases}$ だから，h^2 も可測である．このことを踏まえて，$fg = \dfrac{1}{2}(f+g)^2 - \dfrac{1}{2}f^2 - \dfrac{1}{2}g^2$ だから，fg のボレル可測性が得られる．

(4) $\left\{\displaystyle\sup_{n\in\mathbb{N}} f_j > \lambda\right\} = \displaystyle\bigcup_{n=1}^\infty \{f_j > \lambda\}$ より明らかである．

□

定理 1.17. 正値可測関数は単純関数の $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ の単調増大極限として表される．

証明. f_j をガウス記号 $[\cdot]$ を用いて

$$f_j(x) = \chi_{\{|x|\le j\}}(x)\chi_{\{f(x)\le j\}}(x) 2^{-jn}[2^{jn} f(x)] \ (j \in \mathbb{N}) \tag{1.20}$$

と定義すればよいだけのことである． □

2. 積分の性質と基本定理

2.1. **積分の定義.** 正値可測関数の積分を定義しよう．

定義 2.1 (単純関数の積分)**.** $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ を正値単純関数とする．$a_1,a_2,\cdots,a_N\in\mathbb{R}$ と (共通部分を持っていてもよい) $E_1,E_2,\cdots,E_N\in\mathcal{B}$ を用いて $f=\sum_{j=1}^N a_j\,\chi_{E_j}$ と表されるとき，$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx=\sum_{j=1}^N a_j\,|E_j|$ と定める．

命題 2.2. 正値単純関数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ の積分 $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx$ の定義は許容表現のとり方によらない．

証明. 正値単純関数 f の二つの許容表現

$$f=\sum_{j=1}^N a_j\,\chi_{E_j}=\sum_{k=1}^M b_k\,\chi_{F_k} \tag{2.1}$$

が与えられたとする．すると，$f=\sum_{j=1}^N\sum_{k=1}^M a_j\,\chi_{E_j\cap F_k}=\sum_{j=1}^N\sum_{k=1}^M b_k\,\chi_{E_j\cap F_k}$ となる．$E_j\cap F_k$ が空でないとき，$p_{jk}\in E_j\cap F_k$ のとき，$a_j=b_k=f(p_{jk})$ である．よって，

$$\sum_{j=1}^N a_j\,|E_j|=\sum_{j=1}^N\sum_{k=1}^M a_j\,|E_j\cap F_k|=\sum_{j=1}^N\sum_{k=1}^M b_k\,|E_j\cap F_k|=\sum_{k=1}^N b_k\,|F_k| \tag{2.2}$$

となるので，証明が完成した． □

定義 2.3 (正値関数の積分)**.** $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ が正値可測関数のとき，

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx:=\sup\left\{\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,dx\ :\ g\text{ は単純関数で，すべての }x\in\mathbb{R}^n\text{ に対して }g(x)\le f(x)\right\} \tag{2.3}$$

と定める．

定義より次は明らかである．

命題 2.4. $a\ge 0$ で，$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ が正値可測関数のとき，$\int_{\mathbb{R}^n} a\,f(x)\,dx=a\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx$ となる．

次の補題によって，積分のいろいろな性質が保証される．

補題 2.5. $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ が正値単純関数で，$\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ がすべての $x\in\mathbb{R}^n$ に対して $\lim_{j\to\infty} f_j(x)\ge g(x)$ を満たす正値可測関数の増大列のとき，

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,dx=\lim_{j\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\min(g(x),f_j(x))\,dx. \tag{2.4}$$

証明. 積分の加法性によって，つまり E,F が互いに交わらないボレル集合のとき，正値単純関数に対して $\int_{E\cup F} f(x)\,dx=\int_E f(x)\,dx+\int_F f(x)\,dx$ が成り立つことから，g は 0 と a 二つの値しかとらないと仮定してよい．よって，有限測度可測集合 E と $a>0$ に対して，$a|E|=\lim_{j\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\min(a\,\chi_E,f_j)$ を示せばよい．

$\varepsilon>0$ を固定して，$E_j:=\{f_j>a-\varepsilon\}\cap E$ とする．$E_1\subset E_2\subset\cdots\to E$ だから，系 1.13 より，

$$a|E|\ge\lim_{j\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\min(a\,\chi_E,f_j)\ge\lim_{j\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}(a-\varepsilon)\chi_{E_j}(x)\,dx=\lim_{j\to\infty}(a-\varepsilon)|E_j|=(a-\varepsilon)|E| \tag{2.5}$$

となる．$\varepsilon > 0$ は任意だから，

$$a|E| = \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \min(a\,\chi_E(x), f_j(x))\,dx. \tag{2.6}$$

よって，(2.4) が証明された． □

ここで，積分の基本定理を示す．

定理 2.6 (単調収束定理)**.** $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ は正値可測関数の増大列とする．$\lim_{j\to\infty} f_j(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ で関数 f を定めると

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_j(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx \tag{2.7}$$

が成り立つ．

証明. $f_j \le f$, $j \in \mathbb{N}$ だから，$\lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_j \le \int_{\mathbb{R}^n} f$, は明らかである．逆向きの不等式を示そう．そのためには単純関数 g を $g \le f$ となるようにとれば，補題 2.5 によって，

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,dx = \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \min(g(x), f_j(x))\,dx \le \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_j(x)\,dx \tag{2.8}$$

となる．単純 g 関数は任意だったから，(2.7) が証明できた． □

命題 2.7 (積分の線形性)**.** f, g が正値可測関数ならば，

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f(x) + g(x))\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx + \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,dx \tag{2.9}$$

となる．

証明. 定理 1.17 より，単純関数の増大列 $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ と $\{g_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ で f と g に収束するものが取れる．定理 2.6 より，

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f(x) + g(x))\,dx = \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} (f(x) + g(x))\,dx,$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_j(x)\,dx,\ \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,dx = \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_j(x)\,dx.$$

各 f_j，g_j は単純関数だから，定義 2.3 より (2.9) は明らかである．よって，これらの考察より，一般の f, g に対しても (2.9) が得られる． □

可測関数に対する積分を定義する前に，ファトゥの補題を証明しておこう．実数列 $\{a_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ の下極限 $\liminf_{j\to\infty}$ とは $\liminf_{j\to\infty} a_j := \lim_{k\to\infty} \left(\inf_{\substack{j\in\mathbb{Z} \\ j\ge k}} a_j \right)$ で与えれられていたことを思い出そう．

定理 2.8 (ファトゥの補題)**.** 正値可測関数 $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ に対して，

$$\int_{\mathbb{R}^n} \liminf_{j\to\infty} f_j(x)\,dx \le \liminf_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_j(x)\,dx \tag{2.10}$$

が成り立つ．

証明. 定理 2.6 と $\left\{\inf_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ j\geq k}} f_j\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ が正値増大関数列であることによって，

(2.11)
$$\int_{\mathbb{R}^n}\liminf_{j\to\infty} f_j(x)\,dx = \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\inf_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ j\geq k}} f_j(x)\,dx = \liminf_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\inf_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ j\geq k}} f_j(x)\,dx \leq \liminf_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)\,dx.$$

よって，定理は証明された. □

2.2. **一般の関数に対する積分の定義.** 一般の可測関数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ に対して積分を定義していこう.

定義 2.9 (f の $\pm$-部分と可積分性). 可測関数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ が可積分であるとは，$f^+ := \max(f,0)$ と $f^- := \min(-f,0)$ の両方が積分が有限であることをいう. $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ が可積分のとき，

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f^+(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}^n} f^-(x)\,dx \tag{2.12}$$

と定める.

次の補題は簡単なことであるが，可積分性の判定に役立つ.

補題 2.10 (可積分性の判定). 可測関数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ が可積分であることと $|f|$ が可積分であることは同値である.

証明. これは命題 2.7 によって

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} (f^+(x)+f^-(x))\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f^+(x)\,dx + \int_{\mathbb{R}^n} f^-(x)\,dx \tag{2.13}$$

だから，明らかである. □

命題 2.11. $\mathbb{R}^n$ 上の実数値可積分関数全体は $\mathbb{R}$-線形空間の構造を持つ.

証明. 掛け算は足し算より証明が簡単であるから，足し算の演算に焦点を置いて証明しよう. $f,g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ を可積分関数とすると，

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)+g(x)|\,dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|+|g(x)|\,dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,dx + \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|\,dx < \infty, \tag{2.14}$$

だから，$f+g$ は可積分である. さらに，命題 2.7 より，

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|+|g(x)|\pm(f(x)+g(x))}{2}\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)+g(x)|\pm(f(x)+g(x))}{2}\,dx + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|+|g(x)|-|f(x)+g(x)|}{2}\,dx.
\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} (f(x)+g(x))\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)+g(x)|+f(x)+g(x)}{2}\,dx - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)+g(x)|-f(x)-g(x)}{2}\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left\{\frac{|f(x)|+|g(x)|+f(x)+g(x)}{2} - \frac{|f(x)|+|g(x)|-|f(x)+g(x)|}{2}\right\}dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^n} \left\{\frac{|f(x)|+|g(x)|-f(x)-g(x)}{2} - \frac{|f(x)|+|g(x)|-|f(x)+g(x)|}{2}\right\}dx.
\end{aligned}$$

ここで f,g は両方とも可積分だから，

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n}(f(x)+g(x))\,dx\\
&=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|f(x)|+|g(x)|+f(x)+g(x)}{2}\,dx-\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|f(x)|+|g(x)|-f(x)-g(x)}{2}\,dx\\
&=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|f(x)|+f(x)}{2}\,dx+\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|g(x)|+g(x)}{2}\,dx-\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|f(x)|-f(x)}{2}\,dx-\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|g(x)|-g(x)}{2}\,dx\\
&=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|f(x)|+f(x)}{2}\,dx-\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|f(x)|-f(x)}{2}\,dx+\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|g(x)|+g(x)}{2}\,dx-\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|g(x)|-g(x)}{2}\,dx\\
&=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\,dx+\int_{\mathbb{R}^n}g(x)\,dx.
\end{aligned}
$$

よって積分の線形性が証明された． □

それでは，ここで重要なルベーグの収束定理を示そう．

定理 2.12 (ルベーグの収束定理)**.** $f_1,f_2,\cdots:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ を f に各点収束するような可測関数列とする．可積分関数 $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ が存在して，すべての $j\in\mathbb{N}$ と $x\in\mathbb{R}$ に対して $|f_j(x)|\le g(x)$ を満たしていれば

$$
\lim_{j\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}f_j(x)\,dx=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\,dx \tag{2.15}
$$

となる．

証明. $g\pm f_j\ge 0$ であるから，ファトゥの補題により，

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n}(g(x)+f(x))\,dx&\le\int_{\mathbb{R}^n}g(x)\,dx+\liminf_{j\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}f_j(x)\,dx\\
\int_{\mathbb{R}^n}(g(x)-f(x))\,dx&\le\int_{\mathbb{R}^n}g(x)\,dx+\liminf_{j\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}(-f_j(x))\,dx\\
&=\int_{\mathbb{R}^n}g(x)\,dx-\limsup_{j\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}f_j(x)\,dx
\end{aligned}
$$

となる．ここで，各項は仮定によって有限であるから，

$$
\limsup_{j\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}f_j(x)\,dx\le\int f(x)\,dx\le\liminf_{j\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}f_j(x)\,dx\le\limsup_{j\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}f_j(x)\,dx \tag{2.16}
$$

となり，証明が完成する． □

この定理は次の形で使われる．

系 2.13. $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ は $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n}|f_j(x)|\,dx<\infty$ を満たしている可積分関数列とするとき，

$$
\sum_{j=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n}f_j(x)\,dx=\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{j=1}^{\infty}f_j(x)\,dx
$$

が成り立つ．

証明. 単調収束定理 (定理 2.6) より，$\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}\int |f_j(x)|\,dx = \int \sum_{j=1}^{\infty}|f_j(x)|\,dx < \infty$ だから，ルベーグの収束定理 (定理 2.12) を $\{F_j\}_{j\in\mathbb{N}} = \left\{\displaystyle\sum_{k=1}^{j} f_k\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ と $G = \displaystyle\sum_{j\in\mathbb{N}}|f_j|$ に適用すればよい． □

ルベーグの収束定理は次の形でもよく使われる．

定理 2.14. $F : (a,b)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は次の条件を満たしている関数とする．(1) $x\in\mathbb{R}$ を止めるごとに $F(\cdot,x)$ は連続関数となる．(2) 可積分関数 $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ が存在して，$|F(t,\cdot)|\le g$ となる．このとき，

$$\lim_{t\to t_0}\int_{\mathbb{R}^n} F(t,x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} F(t_0,x)\,dx,\ t_0\in(a,b). \tag{2.17}$$

証明. 点列の言葉で主張を言い換えれば，t_0 に収束する点列 $\{t_j\}_{j\in\mathbb{N}}\subset(a,b)$ に対して，

$$\lim_{j\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} F(t_j,x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} F(t_0,x)\,dx$$

を示せばよいことになるが，これはちょうどルベーグの収束定理を $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}} = \{F(t_j,\cdot)\}_{j\in\mathbb{N}}$ に適用しただけのことである． □

定理 2.15. $F : (a,b)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は次の条件を満たしている関数とする．(1) すべての $t\in(a,b)$ と $x\in\mathbb{R}$ に対して $\partial_t F(t,x)$ が存在する．(2) $F(t,\cdot)$ は可積分である．(3) 可積分関数 $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ が存在して，$|\partial_t F(t,x)|\le g(x)$, $x\in\mathbb{R}$ となる．このとき，

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} F(t,x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n}\partial_t F(t,x)\,dx. \tag{2.18}$$

証明. $t_0\in(a,b)$ を止めて，関数

$$G(t,x) := \int_0^1 \partial_t F(t_0+(t-t_0)u,x)\,du,\ t\in(a,b),\ x\in\mathbb{R}^n \tag{2.19}$$

を考える．ここで，微分積分学の基本定理によって

$$G(t,x) = \frac{F(t,x)-F(t_0,x)}{t-t_0},\ t\ne t_0 \tag{2.20}$$

となる．よって，定理 2.14 を G に対して適用すれば結論が得られる． □

可測性，可積分性などの概念は複素数値関数に対しても適用される．ルベーグの収束定理の複素数値版も記述，証明できる．

2.3. **積分不等式.**

命題 2.16. $f,g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ が可積分関数で $f\le g$ のとき，$\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx \le \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,dx$, が成り立つ．

証明. これは正値可積分関数の性質と線形性より明らかである． □

この不等式を用いていろいろな不等式を

命題 2.17. $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ を可積分関数とするとき，$\displaystyle\left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx\right| \le \int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|\,dx.$

証明. 複素数 $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して $|\alpha| = \sup_{\theta \in \mathbb{R}} \mathrm{Re}(e^{i\theta}\alpha)$ だから，

(2.21)
$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx\right| \le \sup_{\theta\in\mathbb{R}} \mathrm{Re}\left[\exp(i\theta)\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx\right] = \sup_{\theta\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{Re}\left[\exp(i\theta) f(x)\right]\,dx \le \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,dx.$$

ここで，最後の不等式に命題 2.16 を用いた． □

命題 2.18 (チェビシェフの不等式)**.** f を可測関数で $\lambda > 0$ とする．このとき，

$$|\{|f| > \lambda\}| \le \frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,dx \tag{2.22}$$

が成り立つ．

証明. 命題 2.16 と不等式 $\chi_{\{|f|>\lambda\}} \le \dfrac{|f|}{\lambda}$ を組み合わせよ． □

次の系は可積分関数はあまり絶対値が大きくならないことを主張している．

系 2.19. 可積分関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ に対して $|\{|f| = \infty\}| = 0$ が成り立つ．

証明. $\lambda > 0$ に対して，$\{|f| = \infty\} \subset \{|f| > \lambda\}$ だから，

$$|\{|f| = \infty\}| \le |\{|f| > \lambda\}| \le \frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,dx. \tag{2.23}$$

$\lambda > 0$ は任意で $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,dx < \infty$ であることにより，$|\{|f| = \infty\}| = 0$ となる． □

2.4. **フビニの定理.** ここでは，$m, n \in \mathbb{N}$ として，積分の順番を交換することができることを主張するフビニの定理を証明する．

補題 2.20. すべてのボレル集合 $A \subset \mathbb{R}^{n+m}$ に対して，関数

$$x \in \mathbb{R}^n \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} \chi_A(x,y)\,dy$$

か可測で，

$$\int_{\mathbb{R}^{m+n}} \chi_A(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} \chi_A(x,y)\right)\,dx$$

が成り立つ．

証明. 単調収束定理によって，すべての直方体 R とボレル集合 A に対して，関数

$$x \in \mathbb{R}^n \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} \chi_{A\cap R}(x,y)\,dy \tag{2.24}$$

か可測で，

$$\int_{\mathbb{R}^{m+n}} \chi_{A\cap R}(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} \chi_{A\cap R}(x,y)\,dy\right)\,dx \tag{2.25}$$

が成り立つことを示せばよい．

次の条件を満たす性質 $\mathcal{P}^*$ をすべて満たしている $\mathbb{R}^n$ の部分集合全体を考える．

(a) A, B が $\mathcal{P}^*$ を満たして，$A \subset B$ ならば，$B \setminus A$ は $\mathcal{P}^*$ を満たす．
(b) $A_1, A_2, \cdots, A_j, \cdots$ が $\mathcal{P}^*$ を満たして，さらに $A_1, A_2, \cdots, A_j, \cdots$ が互いに交わらないなら，$\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ は $\mathcal{P}^*$ を満たす．

(c) 長方形は $\mathcal{P}^*$ を満たす.

ボレル集合であるという条件は $\mathcal{P}^*$ のみたすべき条件 (a) と (b) と (c) を満たしているので，今考えている条件 (a) と (b) と (c) を満たす集合はボレル集合の一部ということになる.

例えば，今考えているような条件は $\mathcal{P}^*$ の一例である．そこで，A, B が (a) と (b) と (c) を満たしている性質 $\mathcal{P}^*$ すべてを満たしているとしよう．このとき，$A \cap B$ も $\mathcal{P}^*$ を満たしていることを示せれば，$\mathcal{P}^*$ をすべて満たしている $\mathbb{R}^n$ の部分集合は結局ボレル集合ということになる.

A, B が (a) と (b) と (c) を満たしている性質 $\mathcal{P}^*$ すべてを満たしているとして，$A \cap B$ も $\mathcal{P}^*$ を満たすことが目的なのであるが，特別な場合として A が長方形である時を考えよう.

$\mathcal{P}^*$ という性質が与えられたとして，次のような性質 $\mathcal{P}^*_A$ を考える.

B が $\mathcal{P}^*_A$ を満たすとは，$A \cap B$ が $\mathcal{P}^*$ を満たすことである.

すると，

(a') B_1, B_2 が $\mathcal{P}^*_A$ を満たしていて，$B_1 \subset B_2$ ならば，$B_2 \setminus B_1$ も $\mathcal{P}^*_A$ を満たしている．実際，$B_1 \cap A$, $B_2 \cap A$ が $\mathcal{P}^*$ を満たしているから，$(B_2 \setminus B_1) \cap A = (B_2 \cap A) \setminus (B_1 \cap A)$ も $\mathcal{P}^*$ を満たす．よって，$B_2 \setminus B_1$ は $\mathcal{P}^*_A$ を満たしている.

(b') $B_1, B_2, \cdots$ が $\mathcal{P}^*_A$ を満たしていて，これらが互いに交わらないなら，$\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ も $\mathcal{P}^*_A$ を満たしている．実際，$B_1, B_2, \cdots$ が $\mathcal{P}^*_A$ を満たしているから，$A \cap B_j$ は $\mathcal{P}^*$ を満たしていて，したがって，$\displaystyle A \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A \cap B_j$ は $\mathcal{P}^*$ を満たしている．これは，$\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ が $\mathcal{P}^*_A$ を満たしていることを意味している.

(c') 直方体は $\mathcal{P}^*_A$ を満たしている．実際，A が直方体であるから，B を直方体とすると，$A \cap B$ は直方体である．したがって，$A \cap B$ は $\mathcal{P}^*_A$ を，B は $\mathcal{P}^*$ を満たしていることになる.

このことによって，$\mathcal{P}^*_A$ は条件 (a) と (b) と (c) を満たしていることが分かったので，A が直方体の場合には $A \cap B$ は条件 (a) と (b) と (c) を満たしている $\mathcal{P}^*$ をすべて満たしていることが分かった.

一般に，A, B が (a) と (b) と (c) を満たしている性質 $\mathcal{P}^*$ すべてを満たしているとして，$A \cap B$ も $\mathcal{P}^*$ を満たすことを示そう．$\mathcal{P}^*$ という性質が与えられたとして，次のような性質 $\mathcal{P}^*_A$ を考える.

B が $\mathcal{P}^*_A$ を満たすとは，$A \cap B$ が $\mathcal{P}^*$ を満たすことである.

すると，

(a") B_1, B_2 が $\mathcal{P}^*_A$ を満たしていて，$B_1 \subset B_2$ ならば，$B_2 \setminus B_1$ も $\mathcal{P}^*_A$ を満たしている．実際，$B_1 \cap A$, $B_2 \cap A$ が $\mathcal{P}^*$ を満たしているから，$(B_2 \setminus B_1) \cap A = (B_2 \cap A) \setminus (B_1 \cap A)$ も $\mathcal{P}^*$ を満たす．よって，$B_2 \setminus B_1$ は $\mathcal{P}^*_A$ を満たしている.

(b") $B_1, B_2, \cdots$ が $\mathcal{P}^*_A$ を満たしていて，これらが互いに交わらないなら，$\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ も $\mathcal{P}^*_A$ を満たしている．実際，$B_1, B_2, \cdots$ が $\mathcal{P}^*_A$ を満たしているから，$A \cap B_j$ は $\mathcal{P}^*$ を満たしていて，したがって，$\displaystyle A \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A \cap B_j$ は $\mathcal{P}^*$ を満たしている．これは，$\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ が $\mathcal{P}^*_A$ を満たしていることを意味している.

(c") これは前の段落で示したことである.

したがって，$A \cap B$ は条件 (a) と (b) と (c) を満たしている $\mathcal{P}^*$ をすべて満たしている．

よって，補題が示された. □

定理 2.21. $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ が正値可測関数なら，

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\,dy \in [0,\infty] \tag{2.26}$$

は可測で

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(x,y)\,dx\,dy \tag{2.27}$$

となる．

証明. 補題 2.20 より $f(x,y) = \chi_A(x,y)$ とボレル集合 A を用いて表される場合は正しいとわかる．線形性より，結論は単純関数に持ち上がる．単調収束定理 (定理 2.6) をつかえば，正値可測関数にも結論が持ち上がる． □

E が可測集合のとき，E 上の関数の理論を展開することもできる．一つの方法としては，E の外では関数を 0 とみなすことである．こうすれば，いろいろな概念を E 上の関数に対しても定義できる．たとえば，E 上の可測関数 f が可積分であるとは，E 上で $F(x) = f(x)$ として，E^c 上 $F(x) = 0$ とおいたとき，F が $\mathbb{R}^n$ 上可積分であることである．また，$\displaystyle\int_E f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} F(x)\,dx$ とおく．

定理 2.22. $f : \mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ は可積分関数とする．

(1) $E = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,:\, \displaystyle\int_{\mathbb{R}^m} |f(x,y)|\,dy = \infty \right\}$ は測度 0 である．

(2) $x \in \mathbb{R}^n \mapsto \chi_{E^c}(x) \displaystyle\int_{\mathbb{R}^m} f^+(x,y)\,dy - \chi_{E^c}(x) \int_{\mathbb{R}^m} f^-(x,y)\,dy \in [-\infty,\infty]$ は可測で，等式

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(x,y)\,dx\,dy \tag{2.28}$$

が成り立つ．

ここで，$0 \cdot \infty = 0$ と約束している．また，

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^n \setminus E} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\,dy \right) dx \tag{2.29}$$

と解釈すること．

証明. (1) は定理 2.21 とチェビシェフの不等式により得られる．(2) は $f = f^+ - f^-$ と分解して，定理 2.21 を用いればよい． □

2.5. **リーマン積分との関係.** リーマン積分とルベーグ積分の関係を述べておこう．

定理 2.23. $f : \overline{R} \to \mathbb{R}$ が $R \in \mathcal{R}$ で連続なら，$\overline{R}$ 上リーマン積分が可能で，ルベーグ積分と一致する．

証明. 証明では，積分はすべてルベーグ積分と解釈する．$j \in \mathbb{N}$ として，$\overline{R}$ を j^n 個の長方形 $R_{j,1}, \cdots, R_{j,j^n}$ に等分する．ここで，$f_j = \displaystyle\sum_{k=1}^{j^n} \left(\inf_{R_{j,k}} f\right) \chi_{R_{j,k}}$ と定義すると，

$$I_j = \int_{\overline{R}} f_j = \sum_{k=1}^{j^n} \left(\inf_{R_{j,k}} f\right) |R_{j,k}|, \ j \in \mathbb{N}$$

は f の $\overline{R}$ 上のリーマン積分に収束する．一方で，f の $\overline{R}$ における一様連続性と定理 2.12 より I_j は $\displaystyle\int_{\overline{R}} f(x)\,dx$ に収束する． □

系 2.24. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は連続かつ可積分関数とする．このとき，f は $\mathbb{R}^n$ 上広義リーマン可積分で，その値は f の $\mathbb{R}^n$ 上のルベーグ積分と同じである．

証明. ルベーグの収束定理と定理 2.23 によって，$R_1, R_2, \cdots, R_j, \cdots$ が増大して，$\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} R_j = \mathbb{R}^n$ を満たしているとき，$\displaystyle\lim_{j\to\infty} \int_{R_j} f(y)\,dy$ が存在して，f の $\mathbb{R}^n$ 上のルベーグ積分に収束する． □

可積分関数の重要な例を挙げる．

系 2.25. $n = 1$ とする．このとき，関数 $x \in (0, \infty) \mapsto x^{-a} \in (0, \infty)$ が $[1, \infty)$ 上で可積分であるためには，$a > 1$ が必要十分である．関数 $x \in (0, \infty) \mapsto x^{-a} \in (0, \infty)$ が $(0, 1]$ 上で可積分であるためには，$a < 1$ が必要十分である．

証明. 最初の主張だけ証明する．x^{-a} が $[1, \infty)$ 上で可積分であるのと，
(2.30)

$$\int_{[1,\infty)} x^{-a}\,dx = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[1,\infty)}(x) x^{-a}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \chi_{[1,R)}(x) x^{-a}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^R x^{-a}\,dx < \infty,$$

は同値である．ここで，3 番目の不等式を得るのに単調収束定理 (定理 2.6) を用いた．また，最後の積分はリーマン積分である．ここで，不定積分を計算すればわかるように $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_1^R x^{-a}\,dx < \infty$ と $a > 1$ は同値であるから，証明が完成した． □

2.6. **測度 0 の集合.** E が測度 0 の可測のとき，可測関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ に対して $\displaystyle\int_E f(x)\,dx = 0$ となる．この意味で測度 0 の集合は大事な集合であるとわかる．

定義 2.26. E を可測集合とする．ある性質がほとんどすべての $x \in E$ に対して成り立つとは，その性質が成り立たない点全体が測度 0 となることである．$E = \mathbb{R}^n$ のときは，$\in E$ を省く．

測度 0 の集合を無視できるから，多くの定理を拡張できる．これは一例である．

定理 2.27. $E \subset \mathbb{R}^n$ を可測集合とする．$f_1, f_2, \cdots : E \to \mathbb{R}$ を可測関数列でほとんどすべての $x \in E$ に対して，$\displaystyle\lim_{j\to\infty} f_j(x) = f(x)$ が存在するものとする．さらに，可積分関数 $g : E \to \mathbb{R}$ が存在して，ほとんどすべての $x \in E$ に対して，$|f_j(x)| \le g(x)$ が成り立つとする．このとき，

$$\lim_{j\to\infty} \int_E f_j(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx$$

が成り立つ．

2.7. **稠密性.** 正値可測関数の単調増大極限として表されるという以外には可積分関数の構造は非常に複雑である．そこで，可積分関数を C_c-級，もっと言えば C_c^∞-級関数で近似したい．ここで，

$$\begin{aligned}\mathrm{supp}(f) &:= \overline{\{f \neq 0\}},\ f \in C(\mathbb{R}^n)\\ C_c(\mathbb{R}^n) &:= \{f \in C(\mathbb{R}^n) : \mathrm{supp}(f) \text{ はコンパクト }\}\\ &= \{f \in C(\mathbb{R}^n) : \text{ある } R>0 \text{ が存在して，}\quad f(x)=0,\ |x|>R\}\\ C_c^\infty(\mathbb{R}^n) &:= C_c(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)\end{aligned}$$

とおく．

命題 2.28. 可積分関数 f の積分は $C_c(\mathbb{R}^n)$ 近似が可能である．つまり，$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が可積分で $\varepsilon > 0$ なら，$g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ を $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |f-g| < \varepsilon$ となるように選べる．

証明. 何段階かに分けて証明する．

(1) E を可測集合で $f = \chi_E$ のときを考える．この場合ですら，証明はかなり難しい．

$$\mathcal{C} := \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{g \in C_c(\mathbb{R}^n)} \left\{F \in \mathcal{B} : \int_{\mathbb{R}^n} |\chi_{F\cap R} - g| < \varepsilon\right\} \tag{2.31}$$

とおこう．すると，$\mathcal{R} \subset \mathcal{C}$ となる．ここで，集合 $F \in \mathcal{B}$ に対して，$F^c \in \mathcal{B}$ としよう．$\varepsilon > 0$ とする．$\mathcal{R} \subset \mathcal{C}$ だから $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ と $\psi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ をうまく選べば，$\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi - \chi_R| < \frac{\varepsilon}{2}$ かつ $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |\psi - \chi_{R\cap F}| < \frac{\varepsilon}{2}$ となる．ここで，$F_1, F_2 \in \mathcal{B}$ とする．すると，すべての $\varepsilon > 0$ に対して $\varphi_1, \varphi_2 \in C_c(\mathbb{R}^n)$ が存在して，

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_j(x) - \chi_{F_j}(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2},\ j=1,2 \tag{2.32}$$

となる．φ_j を $\max(0, \min(\varphi_j, 1))$ で置き換えて，$0 \le \varphi_j \le 1$ としてよい．すると，三角不等式により，

$$\begin{aligned}|\varphi_1(x)\varphi_2(x) - \chi_{F_1\cap F_2}(x)| &\le |\varphi_1(x) - \chi_{F_1}(x)| + |\chi_{F_1}(x)\varphi_2(x) - \chi_{F_1}(x)\chi_{F_2}(x)|\\ &\le |\varphi_1(x) - \chi_{F_1}(x)| + |\varphi_2(x) - \chi_{F_2}(x)|\end{aligned}$$

だから，

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_1(x)\varphi_2(x) - \chi_{F_1\cap F_2}(x)|\,dx \le \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_1(x) - \chi_{F_1}(x)|\,dx + \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_2(x) - \chi_{F_2}(x)|\,dx < \varepsilon \tag{2.33}$$

となる．したがって，$F_1 \cap F_2 \in \mathcal{C}$ が証明された．ここで，

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi - \psi - \chi_{R\cap F^c}| = \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi - \psi + \chi_{R\cap F^c} - \chi_R| \le \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi - \chi_R| + |\psi - \chi_{R\cap F}| < \varepsilon \tag{2.34}$$

だから，$F^c \in \mathcal{C}$ である．次に，$F_1, F_2, \cdots \in \mathcal{C}$ を互いに交わらない列とする．系 1.14 により，$\displaystyle m\left(\bigcup_{j=1}^\infty (R \cap F_j) \setminus \bigcup_{j=1}^N F_j\right) < \frac{\varepsilon}{2}$ である．$F_1, F_2, \cdots, F_N \in \mathcal{C}$ だから，$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_N \in C_c(\mathbb{R}^n)$ を $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_j - \chi_{R\cap F_j}| < \frac{\varepsilon}{2N}$ となるようにとれる．$\displaystyle\varphi = \sum_{j=1}^N \varphi_j$ とすると，$\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi - \chi_{R\cap\bigcup_{j=1}^\infty F_j}| < \varepsilon$ である．よって，$\displaystyle\bigcup_{j=1}^\infty F_j \in \mathcal{Z}$ と $\mathcal{C} = \mathcal{B}$ が証明された．$E \in \mathcal{B} = \mathcal{C}$ だから，所望の結果が証明された．

(2) 線形性によって f が単純関数でも定理の結論が成り立つ．

(3) 正値可積分関数は正値単純関数の単調増大列によって近似できるから，f が正値可積分関数でも定理の結論が成り立つ．
(4) 最後に，f が一般の可積分関数でも $f = f^+ - f^-$ と分けることによって，f が正値可積分関数でも定理の結論が成り立つ．

□

$t \in \mathbb{R}$ に対して，$\tilde{\rho}(t) = \begin{cases} \exp(-t^{-1}) & (t > 0), \\ 0 & (t \leq 0) \end{cases}$ とする．N についての帰納法で $\tilde{\rho} \in C^N(\mathbb{R})$ と証明できるから，$\tilde{\rho} \in C^\infty(\mathbb{R})$ である．$x \in \mathbb{R}^n$ に対して，$\rho_0(x) = \tilde{\rho}(1 - |x|^2)$ とおけば，$\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ である．つまり，$C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ には 0 でない関数が存在する．次の定理では，そのような関数で可積分関数を近似できることを示す．

定理 2.29. 可積分 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ と $\varepsilon > 0$ に対して，$g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ を $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |f - g| < \varepsilon$ となるように選べる．

証明. 命題 2.28 に対して，$f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ としてよい．$\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ を正値関数で積分 1 となるものとして $\rho_j(x) = j^n \rho(j\,x)$ とおこう．f_j を $f_j(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \rho_j(x-y) f(y)\,dy$ と定義する．$\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ は一様収束して，一定のコンパクト集合に台を持つから，ルベーグの収束定理によって，$\displaystyle\lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f - f_j| = 0$ となる．$\varepsilon > 0$ に応じて j を大きくとって $g = f_j$ とすれば，求める g が得られる． □

講義で必要になったらまた書き足します.

3. 抽象的な測度空間

3.1. 測度.

3.2. 積分.

3.3. 積分定理.

3.4. L^p-空間.

L^p-空間とそれに関連する不等式を調べる.

定義 3.1.

(1) $1 \le p < \infty$, E を可測集合する. 可測関数 $f : E \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ もしくは可測関数 $f : E \to \mathbb{C}$ に対して, $L^p(E)$-ノルムは

$$\|f\|_{L^p(E)} = \left(\int_E |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.1}$$

で定義される.

(2) E を可測集合とする. 可測関数 $f : E \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ もしくは可測関数 $f : E \to \mathbb{C}$ に対して, $L^\infty(E)$-ノルムは

$$\|f\|_{L^\infty(E)} = \inf \{R > 0 : \text{ほとんどすべての } x \in E \text{ に対して } |f(x)| \le R\} \tag{3.2}$$

で定義される.

(3) $1 \le p \le \infty$ に対して, $L^p(E)$ は可測関数 f で $\|f\|_{L^p(E)}$ が有限なもの全体のなす線形空間とする.

$E = \mathbb{R}^n$ の場合は (E) を省く.

次の補題は簡単な計算なので, 証明は省略する.

補題 3.2 (Young 不等式)**.** $1 < p < \infty$ とする. $q = \dfrac{p}{p-1}$ とおくとき,

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad (a, b > 0) \tag{3.3}$$

が成り立つ.

定理 3.3. $1 < p < \infty$ とする. $q = \begin{cases} \infty & (p = 1), \\ \dfrac{p}{p-1} & (1 < p < \infty), \\ 1 & (p = \infty), \end{cases}$ とおく. f, g を可測集合 E 上の可測関数とする.

$$(\text{ヘルダーの不等式}) \quad \|fg\|_{L^1(E)} \le \|f\|_{L^p(E)} \|g\|_{L^q(E)}. \tag{3.4}$$

$$(\text{Minkowski の不等式}) \quad \|f + g\|_{L^p(E)} \le \|f\|_{L^p(E)} + \|g\|_{L^p(E)}. \tag{3.5}$$

証明. $L^p(E)$-のノルムの定義より, f と g は正値としてよい. $p = 1$ か $p = \infty$ のときの証明は易しいので省略する. 単調収束定理 (定理 2.6) より, f と g は単純関数としてよい. f と g は 0 ではないとしてよい.

(1) 補題 3.2 より，$ab = (\theta a)(\theta^{-1}b) \leq \dfrac{\theta^p a^p}{p} + \dfrac{\theta^{-q}b^q}{q}$ だから，

$$\|fg\|_1 \leq \frac{\theta^p \|f\|_p{}^p}{p} + \frac{\theta^{-q}\|f\|_q{}^q}{q}. \tag{3.6}$$

$\theta > 0$ を $\theta^p \|f\|_p{}^p = \theta^{-q}\|f\|_q{}^q$ となるように選べば，(3.4) が得られる．

(2) 関数 $\varphi(t) = t^p$ の凸性によって，

$$\begin{aligned}
&\left(\int_E \left(\frac{f(x)+g(x)}{\|f\|_{L^p(E)} + \|g\|_{L^p(E)}}\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left\{\int_E \left(\frac{\|f\|_{L^p(E)}}{\|f\|_{L^p(E)} + \|g\|_{L^p(E)}}\frac{f(x)}{\|f\|_{L^p(E)}} + \frac{\|g\|_{L^p(E)}}{\|f\|_{L^p(E)} + \|g\|_{L^p(E)}}\frac{g(x)}{\|g\|_{L^p(E)}}\right)^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_E \frac{\|f\|_{L^p(E)}}{\|f\|_{L^p(E)} + \|g\|_{L^p(E)}}\frac{f(x)^p}{\|f\|_{L^p(E)}^p} + \frac{\|g\|_{L^p(E)}}{\|f\|_{L^p(E)} + \|g\|_{L^p(E)}}\frac{g(x)^p}{\|g\|_{L^p(E)}^p}\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

となるので，(3.5) が得られる．

□

定義 3.4 (局所可積分性)**.** 可測関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が局所可積分であるとは，$R \in \mathcal{R}$ に対して，$\chi_R \cdot f$ が可積分であることである．

系 3.5. $1 \leq p \leq \infty$ のとき，L^p 関数は局所可積分である．

証明. ヘルダーの不等式より明らかである． □

4. 微分定理

4.1. $\mathbb{R}^n$ 上のルベーグの微分定理.

4.2. 単調増加関数に関するルベーグの微分定理.

4.3. 有界変動関数とその構造.

4.4. 絶対連続関数とその構造.

5. ラドンニコディムの定理