フーリエ級数入門

担当者　澤野嘉宏

Abstract. ここでは，高校生の知識を持っている人なら誰でもわかるようにフーリエ級数に関してわかりやすく説明したい．

Part 1. 講義資料

開講日時，大まかな予定

(1) １０月　４日：1 節，2 節，3 節
(2) １０月１１日：休日．
(3) １０月１８日：4 節，5 節
(4) １０月２５日：6 節，7 節
(5) １１月　１日：8 節，9 節
(6) １１月　８日：10 節，11 節，レポート問題を配布．
(7) １１月１５日：12 節
(8) １１月３０日：レポート締め切り．

講義の進行に関して

講義は原則的に講義ノートを用いて行う．ただし，時間が余った場合演習問題のいくつかを解説する．また，実際に演習問題を自習してわからない問題のうちいくつかを解説する．

成績処理に関して

(1) 澤野担当の講義の最終回１回前の１１月　８日にレポートを課す．
(2) レポート問題は合計８０点前後の配点 (問題は１０問前後) を与え，得点をそのまま成績に反映させる．例外として，講義ノートなどに関して有益なコメントがあった場合は，若干の点数のプラスアルファを与える．また，レポート点は原則５０点で打ち切る．
(3) この講義は澤野５０点，入谷先生５０点の講義で，澤野の講義の点数と入谷先生の講義の点数を合算する．
(4) レポート問題の難易度は A(基本) を７問程度，B(応用) を３問程度出題する．また，ルベーグ積分の問題を２題出題する．問題の難易度は澤野が以下の演習問題に与えている難易度を規準とする．レポートは理学部３号館の事務に提出すること．
(5) ルベーグ積分論を知らないとわかりにくい箇所があるので，後半に自己完結したノートをつけた．ただし，これを自習するのは膨大な努力が必要なので，講義ではそれが必要な場合は明確に明示する．さらに，できる限りそれを使わないように講義で澤野が努力する．
(6) 原稿に誤植があった場合は，常時ウエブ (澤野嘉宏のホームページを検索エンジンで調べて，フーリエ解析の箇所を調べる) にて更新する．おそらく，講義のある日の晩２３：００ごろに更新されていると思うとよいであろう．

参考文献

An introduction to harmonic analysis, third edition, Yitzhak Katznelson.

演習問題に関する注意

(もしくは∗∗) と書かれている箇所はルベーグ積分を既習ではないもののために，リーマン積分を知っていればわかるように仮定を緩めていることを意味する．本質的に内容が変わるわけではないので，ルベーグ積分を学習してからもう一度その問題を考察してほしい．

出てくる数式の読み方

(1) L^p, L_p：エルピー
(2) ℓ^p, ℓ_p：エルピー
(3) ℓ^∞, ℓ_∞：エル無限

Contents

Part 1.　講義資料 1
開講日時，大まかな予定 1
講義の進行に関して 1
成績処理に関して 1
参考文献 2
演習問題に関する注意 2
出てくる数式の読み方 2
1.　三角級数 6
第 1 節の問題 6
2.　基本的な積分と数列に関する公式 8
第 2 節の問題 9
3.　フーリエ級数を作ろう 11
第 3 節の問題 15
4.　任意の関数のフーリエ級数展開 17
第 4 節の問題 20
5.　フーリエ級数の計算 21
第 5 節の問題 23
6.　フーリエ級数の収束の速度 25
第 6 節の問題 28
7.　チェザロ (Cesàro) 総和法 30
第 7 節の問題 32
8.　L^p-空間 35
第 8 節の問題 39
9.　L^2-関数のフーリエ級数展開 41
第 9 節の問題 42
10.　絶対収束フーリエ級数 44
第 10 節の問題 45
11.　L^1-関数と連続関数のフーリエ級数展開 47
第 11 節の問題 47

12.　偏微分方程式への応用 50
第 12 節の問題 51

Part 2.　演習問題の解答，解説 52
13.　標準解答 52
13.1.　第 1 節の解答 52
13.2.　第 2 節の解答 54
13.3.　第 3 節の解答 58
13.4.　第 4 節の解答 60
13.5.　第 5 節の解答 62
13.6.　第 6 節の解答 68
13.7.　第 7 節の解答 71
13.8.　第 8 節の解答 75
13.9.　第 9 節の解答 77
13.10.　第 10 節の解答 81
13.11.　第 11 節の解答 83
13.12.　第 12 節の解答 88

Part 3.　積分論の基本定理（澤野，ベゾフ空間論 (日本評論社) より一部改変して抜粋） 90
14.　積分に関する定理 91

Part 4.　ルベーグ積分に関する詳論 (日本語，短い) 93
15.　n 次元ルベーグ測度 94
15.1.　可測集合の定義とルベーグ測度 94
15.2.　可測関数 100
16.　積分の定義と基本定理 101
16.1.　積分の定義 101
16.2.　一般の関数に対する積分の定義 103
16.3.　積分不等式 106
16.4.　フビニの定理 107
16.5.　測度 0 の集合 109
17.　$\mathbb{R}^n$ 上のルベーグ測度に関する積分の性質 110

17.1. リーマン積分との関係 110
17.2. 稠密性 111
18. 抽象的な測度空間 114
18.1. 測度 114
18.2. 積分 114
18.3. 積分定理 114
18.4. L^p-空間 114

Part 5. レポート問題 116
19. 三角多項式の問題 116
20. 周期関数の問題 116
21. フーリエ級数の計算と関連のある問題 117
22. フーリエ級数展開問題 118
23. フーリエ級数の収束問題 119
24. 微分方程式への応用 120
25. ルベーグ積分の問題 1 121
26. ルベーグ積分の問題 2 122
27. 級数の計算技術の問題 1 123
28. 級数の計算技術の問題 2 123
29. ギブス現象 124

1. 三角級数

$$\begin{aligned}&a_0+a_1\cos x+a_2\cos 2x+\cdots+a_n\cos(nx)+\cdots\\&=a_0\cos 0x+a_1\cos 1x+a_2\cos 2x+\cdots+a_n\cos(nx)+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos(nx)\end{aligned}$$

や

$$b_1\sin x+b_2\sin 2x+\cdots+b_n\sin(nx)+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nx) \tag{1.1}$$

の形の無限級数を三角級数という．これらを足し合わせて作った混合しているもの

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos(nx)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nx) \tag{1.2}$$

も三角級数という．三角級数は実にいろいろなものを与えることができる．その事情を詳しく説明していくことにしよう．

$\mathbb{T}=\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ は商群として扱うことがあるが，$C(\mathbb{T})$ のように 2π-周期の関数として考えることもあるので，注意しよう．

第 1 節の問題.

以下の問題は三角級数とは関係ないが，数論と関係している問題を考察する．

定義 1.1. $\mathbb{T}=\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ をトーラス (torus) と呼ぶ．$\mathbb{T}$ は位相構造と群構造を自然に入れておく．さらに，Lebesgue 測度から決まる自然な測度を入れて $\mathbb{T}$ は全測度 2π の測度空間とする．$\mathbb{T}$ 上の関数は $\mathbb{R}$ 上の関数で周期が 2π のものと同一視することがある．

定義 1.2. $\mathbb{C}^*=\mathbb{C}\setminus\{0\}$，$S^1=\{z\in\mathbb{C}\,:\,|z|=1\}$ とおく．

B

問題 1. $\mathbb{T}=\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ をトーラスとする．$\mathbb{T}$ は位相構造と群構造を自然に入れておく．さらに，ルベーグ測度から決まる自然な測度を入れて $\mathbb{T}$ は全測度 2π の測度空間とする．$\mathbb{T}$ 上の関数は $\mathbb{R}$ 上の関数で周期が 2π のものと同一視することがある．$\mathbb{C}^*=\mathbb{C}\setminus\{0\}$，$S^1=\{z\in\mathbb{C}\,:\,|z|=1\}$ とおく．

(1) $G\subset\mathbb{C}^*$ を部分群とする．また，G には $\mathbb{C}^*$ から誘導される位相を入れておく．
- (a) G がコンパクトなら $G\subset S^1$ であることを示せ．
- (b) G が S^1 に含まれる無限群であるなら，G は稠密であることを示せ．
- (c) S^1 に含まれるコンパクト群の構造を決定せよ．
- (d) 実数 α を 2π でわると有理数にならないようなものとする．このとき，S^1 の部分集合 $E=\{e^{ik\alpha}\,:\,k\in\mathbb{Z}\}$ は S^1 で稠密であることを示せ．

(2) $G\subset S^1$ を可測な (真) 部分群とする．
- (a) G は測度 0 であることを示せ．
- (b) φ を S^1 から $\mathbb{C}^*$ への可測な準同型とするとき，$\varphi(G)\subset S^1$ を示せ．
- (c) S^1 から $\mathbb{C}^*$ への可測な準同型の構造を決定せよ．

B

問題 2. 次のことを証明せよ．

(1) $1, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_d \in \mathbb{R}$ が $\mathbb{Q}$ 上一次独立であるとする．このとき，$\mathbb{T}^d$ の部分群

$$\Lambda = \{(x\lambda_1, x\lambda_2, \cdots, x\lambda_d) \in \mathbb{T}^d : x \in \mathbb{Z}\} \tag{1.3}$$

は稠密である．

(2) $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_d, \pi \in \mathbb{R}$ が $\mathbb{Q}$ 上一次独立であるとする．このとき，任意の実数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_d$ と $\varepsilon > 0$ に対して，ある n が存在して，

$$|e^{in\lambda_j} - e^{i\alpha_j}| < \varepsilon, \quad (j = 1, 2, \cdots, d) \tag{1.4}$$

が成り立つ．

2. 基本的な積分と数列に関する公式

ここでは，リーマン・ルベーグの定理の一つを与える．

定理 2.1 (C^1-級関数に対するリーマン・ルベーグの定理)**.** $[a,b]$ 上の微分可能な関数に対して

$$\left|\int_a^b f(x)\sin(kx)\,dx\right| \le \frac{2}{k}\max_{x\in[a,b]}|f(x)| + \frac{b-a}{k}\max_{x\in[a,b]}|f'(x)| \quad (k>0) \tag{2.1}$$

が成り立つ．とくに，$\displaystyle\lim_{k\to\infty}\int_a^b f(x)\sin(kx)\,dx = 0$ が成り立つ．

さらに，定理の sin を cos で置き換えても同じ結論が得られる．

証明. $k>0$ とする．部分積分によって

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\sin(kx)\,dx &= -\frac{1}{k}\int_a^b f(x)(\cos(kx))'\,dx\\ &= \frac{f(a)\cos(ka)-f(b)\cos(kb)}{k} + \frac{1}{k}\int_a^b f'(x)\cos(kx)\,dx\end{aligned}$$

だから，三角不等式によって

$$\left|\int_a^b f(x)\sin(kx)\,dx\right| \le \frac{|f(a)\cos(ka)|+|f(b)\cos(kb)|}{k} + \frac{1}{k}\int_a^b |f'(x)\cos(kx)|\,dx \tag{2.2}$$

となる．ここで，$t\in[a,b]$ に対して

$$|f'(t)| \le \max_{x\in[a,b]}|f'(x)|,\ |f(a)|,\ |f(b)| \le \max_{x\in[a,b]}|f(x)|,\ |\cos(ka)|, |\sin(ka)| \le 1 \tag{2.3}$$

を用いると，不等式が得られる． □

注意 2.2 (連続関数に対するリーマン・ルベーグの定理)**.** $[a,b]$ 上の連続な関数 f に対して

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b f(x)\sin(kx)\,dx = 0 \tag{2.4}$$

が成り立つ．さらに，sin を cos で置き換えても同じ結論が得られる．

証明. f の代わりに，

$$a = a_1 \le a_2 \le a_3 \le \cdots \le a_{N+1} = b,\ b_1, b_2, \cdots, b_N \in \mathbb{R} \tag{2.5}$$

を満たしている実数を用いて定義される

$$g(x) = \sum_{l=1}^N b_l \chi_{[a_l, a_{l+1})}(x) \tag{2.6}$$

に対しては，定積分を具体的に計算することによって (2.4) は成立することが示される．

そこで，一般の連続関数 f に対して，

$$f_N(x) = \sum_{l=1}^N f\left(a + \frac{b-a}{N}l\right)\chi_{\left[a+\frac{b-a}{N}(l-1),\, a+\frac{b-a}{N}l\right)}(x) \tag{2.7}$$

と置くと，任意の $\varepsilon>0$ に対して，ある N が存在して，

$$|f_N(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad x\in[a,b) \tag{2.8}$$

が成り立つ．したがって，

$$\left|\int_a^b f(x)\sin(kx)\,dx - \int_a^b f_N(x)\sin(kx)\,dx\right| \le (b-a)\varepsilon \tag{2.9}$$

が得られる．$k \to \infty$ とすることで，

(2.10)

$$\limsup_{k\to\infty}\left|\int_a^b f(x)\sin(kx)\,dx\right| = \limsup_{k\to\infty}\left|\int_a^b f(x)\sin(kx)\,dx - \int_a^b f_N(x)\sin(kx)\,dx\right| \le (b-a)\varepsilon$$

となる．$\varepsilon > 0$ は任意であるから，(2.4) が得られた． □

第 2 節の問題.

A

問題 3. $-\pi < a < b < \pi$ とする．また，$\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ を実数列とする．このとき，

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \sin^2(nx + A_n)\,dx = \frac{b-a}{2} \tag{2.11}$$

を示せ．

A

問題 4. f は周期 2π のルベーグ可積分関数 (もしくは連続関数) とするとき，

$$\int_a^{a+2\pi} f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} f(x)\,dx \tag{2.12}$$

を示せ．

A

問題 5. $\ell > 0, \omega = \dfrac{\pi}{\ell}$ とする．さらに，N を自然数として，$p_N(x) = \displaystyle\sum_{k=-N}^{N} \alpha_k\, e^{ikx}$ とおく．このような関数を三角多項式という．$f \in L^2([-\ell,\ell])$ (もしくは $C([-\ell,\ell])$) との平均 2 乗誤差 $\dfrac{1}{2\ell}\displaystyle\int_{-\ell}^{\ell} |f(x) - p_N(x)|^2\,dx$ を最小にする N 次の三角多項式は第 N フーリエ部分和

$$S_N(f)(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k(f)e^{ik\omega x},\ c_k(f) = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)e^{-ik\omega x}\,dx, \tag{2.13}$$

であることを示せ．

A

問題 6 (ルベーグ定数 (Lebesgue constant))**.** D_n は Dirichlet 核とする．つまり，$D_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は

$$D_n(t)\sin\left(\frac{t}{2}\right) = \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) \tag{2.14}$$

を満たす連続関数とする．このとき，数列 $\left\{\|D_n\|_{L^1} - 4\dfrac{\log n}{\pi}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ は有界であることを示せ．

B

問題 7. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$ であることを示せ．ただし，広義積分の存在は認めてしまって構わない．

B

問題 8. 実数 a に対して，$a_+ = \max(a,0)$ と定める．条件

$$a_{n+1} \geq a_n + 2, \quad n = 1,2,\cdots \tag{2.15}$$

を満たす単調増加な自然数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ が与えられたとする．数列 $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ を

$$b_n = \left(1 + \sum_{m=1}^\infty \left\{1 - \left(1 - \frac{|n|}{a_m}\right)_+\right\}\right)^{-1}, \quad (n = 1,2,\cdots) \tag{2.16}$$

と定める．このとき，$\{b_n\}_{n=1}^\infty$ は $n \geq 3$ で $b_{n+1} + b_{n-1} \geq 2b_n$ を満たしていることを示せ．

3. フーリエ級数を作ろう

ここでは，三角級数を具体的に計算してみよう．

例 3.1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\cos(nx) = 1+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos(nx)+\cdots$ は収束していない．このことは，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\cos(nx)=0$ ではないから明らかである．しかし，ここではもっと量的に考えてみよう．第 n 部分和が計算できるからである．

$$C_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)=1+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos(nx) \tag{3.1}$$

となる．$x=2\pi\times$ 整数　の時は，$C_n(x)=n+1$ なので，発散することは明らかである．そうでないときは $C_n(x)$ に $\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ をかけることで，もとの級数の収束，発散の問題は変わらないので $\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ をかけて考えよう．

$$\begin{aligned}
C_n(x)\sin\left(\frac{1}{2}x\right) &= \sin\left(\frac{1}{2}x\right)+\cos x\sin\left(\frac{1}{2}x\right)+\cdots+\cos(nx)\sin\left(\frac{1}{2}x\right)\\
&=\sin\left(\frac{1}{2}x\right)+\frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{3}{2}x\right)-\sin\left(\frac{1}{2}x\right)\right)+\frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{5}{2}x\right)-\sin\left(\frac{3}{2}x\right)\right)\\
&\quad+\cdots+\frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)-\sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right)\right)\\
&=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}x\right)
\end{aligned}$$

であるから，

$$C_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)=1+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos(nx)=\frac{1}{2}+\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)} \tag{3.2}$$

が得られる．したがって，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\cos(nx)=1+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos(nx)+\cdots$ は収束していない．

例 3.2. 「$x=\pi\times$ 整数」以外のときは $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin(nx)=\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin(nx)+\cdots$ も収束していない．このことは，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sin(nx)=0$ ではないから明らかである．やはり，第 n 部分和を

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\sin(kx)=\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin(nx) \tag{3.3}$$

とおいて計算してみる．$S_n(x)$ の定義式の両辺に $\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ をかけて，

$$\begin{aligned}S_n(x)\sin\left(\frac{1}{2}x\right) &= \sin x\sin\left(\frac{1}{2}x\right)+\cdots+\sin(nx)\sin\left(\frac{1}{2}x\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{1}{2}x\right)-\cos\left(\frac{3}{2}x\right)\right)+\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{3}{2}x\right)-\cos\left(\frac{5}{2}x\right)\right)\\ &\quad+\cdots+\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{2n-1}{2}x\right)-\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\right)\\ &= -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}x\right)\end{aligned}$$

であるから，

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\sin(kx)=\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin(nx)=\frac{\cos\left(\frac{1}{2}x\right)-\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)} \tag{3.4}$$

が得られる．したがって，“ $x=\pi\times$ 整数 ”以外のときは

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin(nx)=\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin(nx)+\cdots \tag{3.5}$$

も収束していない．

一般に無限級数は項が 0 に速く収束するほど扱いやすくなるので，これらの級数を変形したものを考えると希望が持てる．実際に，次のようなものは計算が可能であるが，一様収束という言葉は大学初年度では難しく敬遠されている概念なので，定義を復習しておこう．

定義 3.3 (各点収束，一様収束)**.**

(1) 区間 I で定義された実数値関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が f に各点収束するとは，

$$\lim_{n\to\infty}|f(x)-f_n(x)|=0 \tag{3.6}$$

が成り立つことである．

(2) 区間 I で定義された複素数数値関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が f に一様収束するとは，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in I}|f(x)-f_n(x)|\right)=0 \tag{3.7}$$

が成り立つことである．

次のことは，定義によって明らかである．

命題 3.4. 区間 I で定義された複素数数値関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $f: I\to\mathbb{C}$ が与えられたとする．以下は同値である．

(1) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が f に一様収束する．

(2) 任意の $\varepsilon>0$ に対して，ある $N\in\mathbb{N}$ が存在して，$n\geq N$ かつ $x\in I$ のときに，

$$|f(x)-f_n(x)|\leq\varepsilon \tag{3.8}$$

となる．

一様収束という言葉の復習をしたところで，フーリエ級数の収束定理を示そう．

定理 3.5.

(1) $x \in (-\pi, \pi)$ のとき，

$$\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \cdots = \frac{1}{2}x \tag{3.9}$$

が成立する．収束は任意に $0 < a < \pi$ を与えたとき，$[-a, a]$ で一様である．

(2) $x \in (-\pi, \pi)$ のとき，

$$\cos x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x - \frac{1}{4}\cos 4x + \cdots = \log\left\{2\cos\left(\frac{1}{2}x\right)\right\} \tag{3.10}$$

が成立する．収束は任意に $0 < a < \pi$ を与えたとき，$[-a, a]$ で一様である．

このような収束を $(-\pi, \pi)$ における広義一様収束という．

この定理の計算が正しいことをかなり間接的ではあるが，検証しておこう．

注意 3.6. (3.10) において，$x \to \pi$ とすることで，

$$\lim_{x\uparrow\pi}\left(\cos x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x - \frac{1}{4}\cos 4x + \cdots\right) = \lim_{x\uparrow\pi}\log\left\{2\cos\left(\frac{1}{2}x\right)\right\} = -\infty \tag{3.11}$$

が得られる．これは

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \infty \tag{3.12}$$

であることを反映している．

(1) の証明. 部分和を

$$S_n(x) = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin(nx) \tag{3.13}$$

とおく．$S_n(x) \to \frac{1}{2}x$ を示すことになる．S_n を見ていてもどのように収束を示してよいのかわからないので，導関数 S_n' を考えてみよう．つまり，

$$S_n(x) = \int_0^x S_n'(t)\,dt = \int_0^x \left\{\cos t - \cos 2t + \cdots + (-1)^{n-1}\cos(nt)\right\}\,dt$$

と積分形に書き換えて，導関数 S_n' を持ち出す．ここでポイントとなるのは，$\{\cdots\}$ の中を計算できることである．つまり，(3.2) より，

$$\cos t - \cos 2t + \cdots + (-1)^{n-1}\cos(nt) = -\sum_{k=1}^{n}\cos k(t+\pi) = \frac{1}{2} - \frac{\sin\left[\frac{2n+1}{2}(t+\pi)\right]}{2\sin\left[\frac{1}{2}(t+\pi)\right]}$$

となる．したがって，$\lambda = \dfrac{t+\pi}{2}$ なる変数変換をして

$$S_n(x) = \frac{1}{2}x - \int_{\pi/2}^{(x+\pi)/2}\frac{\sin(2n+1)\lambda}{\sin\lambda}\,d\lambda \tag{3.14}$$

となる．ここで，リーマン・ルベーグの定理 (定理 2.1) を用いると，$0 < a < \pi$ に対して，$(0, a)$ 上で $S_n(x)$ が $\frac{1}{2}x$ に一様収束していることがわかる．

(2) の証明

部分和を
(3.15)

$$C_n(x) = \cos x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x - \frac{1}{4}\cos 4x + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\cos(nx) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\cos(kx)$$

とおいて，$C_n(x) \to \log\left\{2\cos\left(\frac{1}{2}x\right)\right\}$ を示すことになる．$(-1)^k \sin(kt) = \sin(k(t+\pi))$ より，

$$C_n(x) = C_n(0) + \int_0^x C_n'(t)\,dt = C_n(0) + \int_0^x \sum_{k=1}^{n} \sin k(t+\pi)\,dt$$

に (3.4) を代入して，

$$C_n(x) = C_n(0) + \int_0^x \frac{\cos\left[\frac{1}{2}(t+\pi)\right] - \cos\left[\frac{2n+1}{2}(t+\pi)\right]}{2\sin\left[\frac{1}{2}(t+\pi)\right]}\,dt \tag{3.16}$$

となる．$n \to \infty$ として，$\lim_{n\to\infty} C_n(0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \log 2$ だから，定理 2.1 によって

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\cos(nx) = \log 2 - \int_0^x \frac{1}{2}\tan\left(\frac{t}{2}\right)\,dt = \log\left\{2\cos\left(\frac{1}{2}x\right)\right\} \tag{3.17}$$

が得られる． □

系 3.7. 等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(-1)^{n-1}\cos(nx) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4} \tag{3.18}$$

が $x \in [-\pi, \pi]$ で成立する．

証明. $x \in (-\pi, \pi)$ に対して，$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos(nx)$ とおこう．すると，(3.9) の一様収束性より，$f'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin(nx) = -\frac{1}{2}x$ が成り立つ．よって，積分して $f(x) = C - \frac{x^2}{4}$ となる．つまり，

$$C - \frac{x^2}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos(nx), \quad x \in (-\pi, \pi) \tag{3.19}$$

である．この等式の両辺は $[-\pi, \pi]$ で連続であるから，$x \uparrow \pi$ と極限移行すると，

$$C - \frac{\pi^2}{4} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \tag{3.20}$$

となる．一方で，$x = 0$ を代入すると，

$$C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \tag{3.21}$$

である．ここで，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n)^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \tag{3.22}$$

であるから，(3.20)，(3.21)，(3.22) を連立させて，$C = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$ を得る． □

この証明によって得られた無限級数の公式を系としてまとめておこう．

系 3.8 (オイラー)**.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

もう少し，例がほしいので，さらに計算を進めていく．

命題 3.9.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}(-1)^{n-1}\sin(nx) = \frac{\pi^2 x}{12} - \frac{x^3}{12} \tag{3.23}$$

が $[-\pi, \pi]$ で成立する．

これは，(3.18) の両辺を積分するだけである．

命題 3.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}(-1)^{n-1}\cos(nx) = \frac{x^4}{48} - \frac{\pi^2 x^2}{24} + \frac{7\pi^4}{720}$ が $[-\pi, \pi]$ で成立する．

証明. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^4} = \frac{7}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ に注意しながら，(3.18) と同じ方法で証明する． □

系 3.11 (オイラー)**.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{945}$.

第 3 節の問題.

以下の問題はフーリエ級数とは関係ないが，級数の計算技術を身につけるべく問題を出題する．

B

問題 9. $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して，

$$n!! = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ n \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 1 & (n \text{ が奇数のとき}) \\ n \cdot (n-2) \cdots 4 \cdot 2 & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases} \tag{3.24}$$

と定める．関数 f_N を $f_N(x) = \sum_{n=0}^{N}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ で定める．

(1) $[0, 1]$ 上で $\lim_{N\to\infty} f_N(x) = \mathrm{Arcsin}x$ を示せ．収束が一様であることも示せ．

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_N(\sin x)\,dx$ を計算せよ．

(3) $S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$, $T = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ を計算せよ．

B

問題 10. 関数 $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ を $g(x) = \begin{cases} -x\log x & (0 < x \leq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$ で定める．

(1) $[0,1]$ 上 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}g(x)^n$ が一様収束することを示せ.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-n} = \int_0^1 x^{-x}\,dx$ を示せ.

B

問題 11.

(1) $[0,1]$ 上で, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2} = \int_0^x \frac{1}{y}\log\left(\frac{1}{1-y}\right)dy$ を示せ.

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{y}\log\left(\frac{1}{1-y}\right)dy = \int_0^{\infty}\frac{z\,dz}{e^z-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ を示せ.

【注意】

(1) (1) の右辺は広義積分であるが, $\displaystyle\frac{1}{y}\log\left(\frac{1}{1-y}\right) = 1+o(1), \quad (y\to 0)$ に留意せよ. したがって, 広義積分は収束していることがわかる.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ は認めて構わない.

B

問題 12. 次の等式を示せ.

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{Arcsin}x}{x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\varphi\,d\varphi}{\tan\varphi} = \frac{\pi}{2}\log 2,\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)^2} = \frac{\pi}{2}\log 2$$

【ヒント】(3.10) の積分を考える.

B

問題 13.

(1) $x\in[0,1]$ のとき, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{an+b} = x^{-b/a}\int_0^{x^{-1/a}}\frac{u^{b-1}}{1+u^a}\,du$ を示せ.

(2) $\displaystyle S_1 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1},\ S_2 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+2}$ を計算せよ.

B

問題 14. 次の公式 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y}{y^2+n^2} = \int_0^{\infty}\frac{\sin(xy)}{e^x-1}\,dx$ を示せ. 広義積分の存在に関して議論する必要はない.

4. 任意の関数のフーリエ級数展開

先ほどの計算を踏まえると，少なくとも多項式は $(-\pi,\pi)$ では三角級数の表示をもつことが予想される．テーラー展開によってもっと多くの関数がフーリエ級数展開されるのではないかと思われる．$\cos,\sin$ を混ぜて書くのは面倒なので，複素数を用いて指数関数の形で書く方式を用いる．複素数とは，$i^2=-1$ という規則からなる計算法則を加えたものであるが，$z=a+bi,\ a,b\in\mathbb{R}$ とあらわしたときに，a を z の実部，b を z の虚部という．複素数値関数とは，$f(t)=t+t^2i$ のような複素数に値をとる関数のことである．複素数値関数でも

$$f'(t)=1+2ti,\ \int_0^1 f(t)\,dt=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}i \tag{4.1}$$

のように実部と虚部に分けて考えれば微分，積分が出来る．テーラー展開

$$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$
$$\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+\cdots$$
$$\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}+\cdots$$

からわかるように

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x \tag{4.2}$$

が成り立つ．この公式をオイラーの公式と言う．

仮に関数 f が $(-\pi,\pi)$ 上で，

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\,e^{inx}=\cdots+c_{n-1}\,e^{i(n-1)x}+c_n\,e^{inx}+c_{n+1}\,e^{i(n+1)x}+\cdots \tag{4.3}$$

と展開されているとしよう．さらに，この収束が一様収束であるとしよう．簡単に計算できるように，$k\in\mathbb{Z}$ に対して，$k\neq 0$ であれば，

$$\int_{-\pi}^{\pi}e^{ikx}\,dx=\left[\frac{e^{ikx}}{ik}\right]_{-\pi}^{\pi}=\frac{e^{ik\pi}-e^{-ik\pi}}{ik}=\frac{(-1)^k-(-1)^k}{ik}=0 \tag{4.4}$$

となり，$k=0$ のときは，

$$\int_{-\pi}^{\pi}e^{ikx}\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}dx=2\pi \tag{4.5}$$

となる．このことを踏まえて

$$\int_{-\pi}^{\pi}e^{-ikx}f(x)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\cdots+c_{n-1}\,e^{i(n-1+k)x}+c_n\,e^{i(n-k)x}+c_{n+1}\,e^{i(n+1-k)x}+\cdots\right)dx \tag{4.6}$$

を計算しよう．仮定している一様収束性によって，

$$\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi}e^{-ikx}f(x)\,dx\\&=\cdots+c_{n-1}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(n-1+k)x}\,dx+c_n\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(n-k)x}\,dx+c_{n+1}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(n+1-k)x}\,dx+\cdots\\&=2\pi c_k\end{aligned}$$

が得られる．つまり，

$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-ikx}f(x)\,dx \tag{4.7}$$

である．そこで，フーリエ級数展開は 2π-周期であることを踏まえて次のような問題を考える．

問題：関数 $f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{C}$ が与えられたときに，

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{-iny} f(y)\, dy \right) e^{inx} \tag{4.8}$$

を考える．

(1) そもそもこの級数が収束するか．収束するとしたらどのような意味合いか？
(2) 仮に収束したとして，その極限は $f(x)$ を与えるか？

この問題は極めて難しい問題である．後に示すが，次のことが知られている．

定理 4.1. $[-\pi, \pi]$ の測度 0 の集合 E を任意に与えるとき，E のすべての点でフーリエ級数が発散するような連続関数が存在する．

この事実からすると，収束問題を考えるのは難しいと予想されるが，$f(x)$ に収束する十分条件を与えてしまおう．一種の逆算である．

定理 4.2. 2π-周期連続関数 $f : [-\pi, \pi]$ の連続度を

$$\omega_f(h, x) := \sup_{|t-x|\le h} |f(t) - f(x)| \tag{4.9}$$

で定める．もし，$x \in [-\pi, \pi]$ がディニ (Dini) 条件

$$\int_0^1 \frac{\omega_f(h, x)}{h}\, dh = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_\varepsilon^1 \frac{\omega_f(h, x)}{h}\, dh < \infty \tag{4.10}$$

を満たすならば，その x に対して，$f(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{-iny} f(y)\, dy \right) e^{inx}$ が成り立つ．

証明. (3.2) より，$\sum_{n=-N}^{N} e^{inx} = 1 + 2\cos x + 2\cos 2x + \cdots + 2\cos Nx = \dfrac{\sin\left(\dfrac{2N+1}{2}x\right)}{2\sin\left(\dfrac{1}{2}x\right)}$ である．

よって，

$$\sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{-iny} f(y)\, dy \right) e^{inx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left[\dfrac{2N+1}{2}(x-y)\right]}{2\sin\left[\dfrac{1}{2}(x-y)\right]} f(y)\, dy \tag{4.11}$$

となる．周期性を用いて

$$\sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{-iny} f(y)\, dy \right) e^{inx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(\dfrac{2N+1}{2}y\right)}{2\sin\left(\dfrac{1}{2}y\right)} f(x-y)\, dy \tag{4.12}$$

と変形をする．

$$R = \left| \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{-iny} f(y)\, dy \right) e^{inx} - f(x) \right| \tag{4.13}$$

とおいて，R を上から評価しよう．$0<u<1$ とする．三角不等式によって，

$$
\begin{aligned}
R &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(\dfrac{2N+1}{2}y\right)}{2\sin\left(\dfrac{1}{2}y\right)} (f(x-y)-f(x))\,dy \right| \\
&\le \left| \int_{-u}^{u} \frac{\sin\left(\dfrac{2N+1}{2}y\right)}{2\sin\left(\dfrac{1}{2}y\right)} (f(x-y)-f(x))\,dy \right| \\
&\quad + \left| \int_{-\pi}^{u} \frac{\sin\left(\dfrac{2N+1}{2}y\right)}{2\sin\left(\dfrac{1}{2}y\right)} (f(x-y)-f(x))\,dy \right| + \left| \int_{u}^{\pi} \frac{\sin\left(\dfrac{2N+1}{2}y\right)}{2\sin\left(\dfrac{1}{2}y\right)} (f(x-y)-f(x))\,dy \right|
\end{aligned}
$$

となる．ここで，第 1 項に $|\sin v| \le 1,\ v\in\mathbb{R},\ |\sin v| \ge \dfrac{2}{\pi}v,\ |v|\le 1$ をあてがうと，

$$
\begin{aligned}
R &\le \int_{-u}^{u} \frac{\pi|f(x-y)-f(x)|}{4|y|}\,dy \\
&\quad + \left| \int_{-\pi}^{u} \frac{\sin\left(\dfrac{2N+1}{2}y\right)}{2\sin\left(\dfrac{1}{2}y\right)} (f(x-y)-f(x))\,dy \right| + \left| \int_{u}^{\pi} \frac{\sin\left(\dfrac{2N+1}{2}y\right)}{2\sin\left(\dfrac{1}{2}y\right)} (f(x-y)-f(x))\,dy \right|
\end{aligned}
$$

となる．$N\to\infty$ とすることで，リーマン・ルベーグの定理から，

$$
\limsup_{N\to\infty} R \le \int_{-u}^{u} \frac{\pi|f(x-y)-f(x)|}{2|y|}\,dy \le 4\int_{0}^{u} \frac{\omega_f(h)}{h}\,dh \tag{4.14}
$$

が得られる．$u\downarrow 0$ とすれば，$\displaystyle\lim_{N\to\infty} R = 0$ が得られる． □

定理 4.2 によって，次の重要な結果が得られた．

定理 4.3. $f\in C^1(\mathbb{R})$ で 2π-周期とするとき，各点収束

$$
f(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{-iny} f(y)\,dy \right) e^{inx} \tag{4.15}
$$

が成り立つ．

オイラーの公式を用いて次のように書き換えてもよい．

定理 4.4. $f\in C^1$ で 2π-周期とするとき，

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\,dy \\
&\qquad + \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\pi} \left\{ \left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos(ny) f(y)\,dy \right) \cos(nx) + \left(\int_{-\pi}^{\pi} \sin(ny) f(y)\,dy \right) \sin(nx) \right\}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

注意 4.5. 一般には与えられた関数 f がフーリエ級数に展開されるのかどうかわからないので，

$$
\begin{aligned}
f(x) \sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\,dy \\
+ \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\pi}\left\{\left(\int_{-\pi}^{\pi}\cos(ny)f(y)\,dy\right)\cos(nx)+\left(\int_{-\pi}^{\pi}\sin(ny)f(y)\,dy\right)\sin(nx)\right\}
\end{aligned}
$$

と表す．このように $\sim$ は仮に展開されたとすると右辺のように表されるという意味合いで使う．

第 4 節の問題.

A

問題 15. $[0,\pi]$ において $f(x)=\dfrac{\pi}{2}-\left|x-\dfrac{\pi}{2}\right|$ で与えられるような周期 2π の奇関数のフーリエ級数展開を求めよ．

A

問題 16 (周期的方形波のフーリエ級数展開)**.** $\ell>0,\ \omega=\dfrac{\pi}{\ell}$ とする．f は周期 2ℓ の関数で，

$$
f(x)=\begin{cases}-1 & (-\ell\le x<0\ \text{のとき})\\ 1 & (0\le x<\ell\text{のとき})\end{cases}
$$

を満たすものとする．この複素フーリエ係数

$$
c_k(f)=\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)e^{-ik\omega x}\,dx \tag{4.16}
$$

を求めよ．また，このフーリエ係数から得られるフーリエ級数展開を書き下せ．

A

問題 17 (周期的三角波のフーリエ級数展開)**.** $\ell>0,\ \omega=\dfrac{\pi}{\ell}$ とする．f は周期 2ℓ の関数で，

$$
f(x)=\begin{cases}x+\ell & (-\ell\le x<0\ \text{のとき})\\ -x+\ell & (0\le x<\ell\text{のとき})\end{cases}
$$

を満たすものとする．この複素フーリエ係数

$$
c_k(f)=\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)e^{-ik\omega x}\,dx \tag{4.17}
$$

を求めよ．また，$e^{ikx}\,(k\in\mathbb{Z})$ と $\sin(kx)\,(k\in\mathbb{N}),\ \cos(kx)\,(k\in\mathbb{N}\cup\{0\})$ の 2 通りの方法で，このフーリエ係数から得られるフーリエ級数展開を書き下せ．

A

問題 18 (のこぎり波のフーリエ級数展開)**.** $A,\ell>0,\ \omega=\dfrac{\pi}{\ell}$ とする．f は周期 2ℓ の関数で，

$$
f(x)=\frac{A}{\ell}x,\ -\ell\le x<\ell
$$

を満たすものとする．この複素フーリエ係数

$$
c_k(f)=\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)e^{-ik\omega x}\,dx \tag{4.18}
$$

を求めよ．また，$e^{ikx}\,(k\in\mathbb{Z})$ と $\sin(kx)\,(k\in\mathbb{N}),\ \cos(kx)\,(k\in\mathbb{N}\cup\{0\})$ の 2 通りの方法で，このフーリエ係数から得られるフーリエ級数展開を書き下せ．

5. フーリエ級数の計算

ここでは，特別な積分公式を整理して，与えられた関数のフーリエ級数展開を考える．

はじめに整数 m につき，

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\,dx &= \begin{cases}\left[\dfrac{\sin(mx)}{m}\right]_{-\pi}^{\pi} & (m\neq 0\text{ のとき})\\ [x]_{-\pi}^{\pi} & (m=0\text{ のとき})\end{cases}\\ &= \begin{cases}\dfrac{2\sin m\pi}{m} & (m\neq 0\text{ のとき})\\ 2\pi & (m=0\text{ のとき})\end{cases}\\ &= \begin{cases}0 & (m\neq 0\text{ のとき})\\ 2\pi & (m=0\text{ のとき})\end{cases}\end{aligned}$$

が成り立つことに注意しよう．ディラック Dirac デルタ $\delta_{m,n}$ を

$$\delta_{m,n} = \begin{cases}0 & (m\neq n\text{ のとき})\\ 1 & (m=n\text{ のとき})\end{cases}$$

を用いて整理すると，

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\,dx = 2\pi\delta_{m,0} \tag{5.1}$$

と表せる．

高校で苦労して覚えた加法定理

$$\begin{aligned}\cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}\\ \sin\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}\{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\}\\ \sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}\end{aligned}$$

を用いて積分を少し計算してみよう．0 以上の整数 m,n に対して

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\cos(nx)\,dx &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(m+n)x+\cos(m-n)x)\ dx\\ &= \pi(\delta_{m+n,0}+\delta_{m-n,0})\\ &= \begin{cases}0 & (m\neq n\text{ のとき})\\ \pi & (m=n>0\text{ のとき})\\ 2\pi & (m=n=0\text{ のとき})\end{cases}\end{aligned}$$

自然数 m,n に対して，($m+n>0$ だから，)

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(mx)\sin(nx)\,dx &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(m-n)x-\cos(m+n)x)\ dx\\ &= \pi(-\delta_{m+n,0}+\delta_{m-n,0})\\ &= \begin{cases}0 & (m\neq n\text{ のとき})\\ \pi & (m=n\text{ のとき})\end{cases}\end{aligned}$$

となる．整数 $m=0,1,2,\cdots,\ n=1,2,\cdots$ に対して，

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(mx)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\{\sin(m+n)x+\sin(m-n)x\}\ dx = 0$$

となる．

以上のことを公式としてまとめておこう．非積分関数は 2π 周期であるから，0 から 2π まで積分しても，$-\pi$ から π まで積分しても同じ計算結果になる．この事情は問題 4 を参考のこと．

定理 5.1.

(1) 0 以上の整数 m に対して，

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\,dx = 2\pi\delta_{m,0} \tag{5.2}$$

が成り立つ．

(2) 1 以上の整数 m に対して，

$$\int_0^{2\pi} \sin(mx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\,dx = 0 \tag{5.3}$$

が成り立つ．

(3) 0 以上の整数 m, n に対して，

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx = \begin{cases} 2\pi & (m = n = 0 \text{ のとき}) \\ \pi & (m = n \neq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (m \neq n \text{ のとき}) \end{cases} \tag{5.4}$$

が成り立つ．

(4) 0 以上の整数 m, n に対して，

$$\int_0^{2\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx = \begin{cases} 0 & (m = n = 0 \text{ のとき}) \\ \pi & (m = n \neq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (m \neq n \text{ のとき}) \end{cases} \tag{5.5}$$

が成り立つ．

(5) 0 以上の整数 m, n に対して，

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx)\sin(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\sin(nx)\,dx = 0 \tag{5.6}$$

が成り立つ．

この公式の応用を与えよう．関数 f が与えられたとき，フーリエ級数展開

$$f(x) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin(nx) + b_n \cos(nx)) \tag{5.7}$$

を考える．a_m を求めたい場合は，a_m を係数とする関数 $\sin(mx)$ を両辺に掛ける．

$$f(x)\sin(mx) = b_0 \sin(mx) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin(nx)\sin(mx) + b_n \cos(nx)\sin(mx)). \tag{5.8}$$

そして，両辺を積分する．

(5.9)

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(mx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} b_0 \sin(mx)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (a_n \sin(nx)\sin(mx) + b_n \cos(nx)\sin(mx))\,dx.$$

公式を用いると，

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(mx)\,dx = \pi a_m \tag{5.10}$$

が得られる．よって，$m \geq 1$ のとき，

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(mx)\,dx \tag{5.11}$$

となる．同様に，$\cos(mx)$ をかけて計算すると，$m \geq 1$ のとき，

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,dx \tag{5.12}$$

が得られる．$m = 0$ のときは $b_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$ となる．cos の係数はこのように $m = 0$ であるときとそうでないときに応じて計算式の分母に 2 がつくかつかないか分かれるので，気をつけよう．

第 5 節の問題.

A

問題 19. f は周期 2π の関数で，$x \in [-\pi, \pi)$ では $f(x) = x$ とする．この f のフーリエ級数を求めて収束発散を議論せよ．

【注意】収束発散は後続の問題や微分可能性からわかるが，ここでは直接的に収束発散を議論するのが望ましい．

A

問題 20. $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ と $\{B_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ を複素数列とする．$f \in L^1([-\pi, \pi])$(もしくは連続関数) とする．

$$T_N(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{N} A_k\cos(kx) + \sum_{k=1}^{N} B_k\sin(kx) \tag{5.13}$$

とする．

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - T_N(x)|\,dx = 0 \tag{5.14}$$

が成り立つとき，$\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ と $\{B_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ を特定せよ．以後，$\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ と $\{B_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ はこの条件によって決まるものとする．

(1) $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\left(\sup_{x\in[-\pi,\pi]} |T_N f(x) - T_{N+1} f(x)|\right) = 0$ を示せ．

(2) 適当な関数 $D_N(t)$ を用いて

$$T_N(x) - f(x) = \int_0^{\pi} (f(x-t) + f(x+t) - 2f(x))D_N(t)\,dt \tag{5.15}$$

と表せ．$D_N(t)$ をディリクレ (Dirichlet) 核という．

(3) $x \in [-\pi, \pi)$ とする．ルベーグの収束定理を用いて

$$\int_0^{\pi} \left|\frac{f(x-t) + f(x+t) - 2f(x)}{t}\right| dt < \infty \tag{5.16}$$

と仮定する．$N \to \infty$ のとき，$T_N f(x)$ は $f(x)$ に収束することを示せ．

【注意】(5.14) は $f \in L^1([-\pi, \pi])$ からは得られない強い条件である．

A

問題 21. $[-\pi,\pi]$ で定義された次の関数のフーリエ級数

$$b_0+\sum_{j=1}^{\infty}(a_j\sin(jx)+b_j\cos(jx)) \tag{5.17}$$

を求めよ．また，この級数の収束と発散についても調べること．

(1) $f(x)=\pi-|x|$.
(2) ただし，a は正の定数である．$g(x)=e^{ax}$.

B

問題 22. $0<\varepsilon<1$ として次の問に答えよ．

(1) $\displaystyle\sum_{k=-n}^{n}e^{ikx}$ は $\varepsilon<x<2\pi-\varepsilon$ において一様に有界であることを示せ．
(2) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を 0 に収束する有界変動数列とする．すなわち，

$$S(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\,e^{inx} \tag{5.18}$$

は $\varepsilon<x<2\pi-\varepsilon$ において一様に収束することを示せ．
(3) $0\le x<2\pi$ における関数 $\dfrac{\pi-x}{2}$ のフーリエ級数を求めて，その収束について調べよ．特に，$[\varepsilon,2\pi-\varepsilon]$ で一様収束することを示せ．

6. フーリエ級数の収束の速度

初めに，$c_k = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt$ が f の指数関数を用いたフーリエ級数で，

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \tag{6.1}$$

と表されることに注意しよう．定理 4.3, 4.4 を用いれば，

$$f(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx} \tag{6.2}$$

となることがわかるが，級数の定義は

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k = \lim_{N_1,N_2\to\infty} \sum_{k=-N_1}^{N_2} a_k \tag{6.3}$$

であるから，

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \tag{6.4}$$

と表すにはギャップがある．この 2 つの差を埋めるには，和のとり方によらずに一定値に収束することを示せばよいのだから，級数の絶対収束を示すことに結びつく．

$$|c_0| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\,dx \tag{6.5}$$

であるが，他の k に対しては，$|k|$ が大きくなるにつれて，$|c_k|$ が小さくなってくれないと，コーシー判定法

> [コーシー判定法 (ただし，n は $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ を動く．)] 関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が不等式 $|f_n(x)| \le M_n\ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ と $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} M_n < \infty$ を満たすならば，$\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(x)$ は絶対収束および一様収束している

が使えない．そこで，そのような条件が使える十分条件を次の定理が与えている．ただし，$C^0(\mathbb{T})$ は周期が 2π の連続関数全体とみなすこと．

定理 6.1. $M = 1, 2, \cdots$ とする．$f \in C^M(\mathbb{T})$ のとき，フーリエ級数展開

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \tag{6.6}$$

において，

$$|c_k| \le \frac{1}{2\pi|k|^M}\int_{-\pi}^{\pi} |f^{(M)}(t)|\,dt, \quad (k \in \mathbb{Z},\, k \ne 0) \tag{6.7}$$

が成り立つ．

証明. $c_k = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt$ であるから，$f(\pi) = f(-\pi)$ に注意して部分積分をして，

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{-ik}e^{-ikt}\right)'\,dt = \frac{1}{2\pi ik}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)e^{-ikt}\,dt \tag{6.8}$$

となる．これを M 回繰り返せば $|c_k|$ は定理にあるような不等式を満たしていることとなる． □

無限級数と微分演算の入れ替えを行うと次の結果が得られる．

系 6.2. $f \in C^\infty(\mathbb{T})$ のとき，

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = \lim_{N_1, N_2 \to \infty} \sum_{k=-N_1}^{N_2} c_k e^{ikx} \tag{6.9}$$

とフーリエ級数展開できる．$M = 0, 1, 2, \cdots$ に対して

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|(1+|k|)^M < \infty \tag{6.10}$$

が成り立ち，したがって特に

$$f^{(M)}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (ik)^M e^{ikx} \tag{6.11}$$

が得られる．

証明. (6.9), (6.10), (6.11) をそれぞれ証明していく．

(1) 定理 4.2 より，

$$f(x) = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx} \tag{6.12}$$

が成り立つ．定理 6.1 より，

$$|c_k| \le \frac{1}{2\pi |k|^2} \int_{-\pi}^{\pi} |f''(x)|\, dx, \quad k \neq 0 \tag{6.13}$$

が成り立つ．したがって，

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| &= |c_0| + \sum_{k=1}^{\infty} (|c_k| + |c_{-k}|) \\
&\le |c_0| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi |k|^2} \int_{-\pi}^{\pi} |f''(x)|\, dx \\
&= |c_0| + \frac{\pi}{6} \int_{-\pi}^{\pi} |f''(x)|\, dx \\
&< \infty
\end{aligned}$$

が成り立つ．つまり，$\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ は絶対収束している．このことより，

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx} = \lim_{N_1, N_2 \to \infty} \sum_{k=-N_1}^{N_2} c_k e^{ikx} \tag{6.14}$$

が従う．(6.12) と (6.14) より，(6.9) が得られる．

(2) (6.10) を証明しよう．そのためには，定理 6.1 より

$$|c_0| \le \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx, \; |c_k| \le \frac{1}{2\pi |k|^{M+2}} \int_{-\pi}^{\pi} |f^{(M+2)}(x)|\, dx \tag{6.15}$$

を使えばよい．実際これより，

$$|c_k|(1+|k|)^M \le \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\,dx & (k=0\text{ のとき}) \\ \dfrac{(1+|k|)^M}{2\pi|k|^M}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\,dx & (k\ne 0\text{ のとき}) \end{cases} \tag{6.16}$$

となる．ここで，

$$(1+|k|)^M \le 2^M|k|^M \quad (k\ne 0\text{ のとき}) \tag{6.17}$$

だから，

$$|c_k|(1+|k|)^M \le \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\,dx & (k=0\text{ のとき}) \\ \dfrac{2^M}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\,dx & (k\ne 0\text{ のとき}) \end{cases} < \infty \tag{6.18}$$

となる．

(3) (6.11) は次の定理を用いればよい．また，$M=1$ の場合を示せば十分である．$M\ge 2$ のときも，$M=1$ の場合に示した方法と似ている方法で示せるからである．

[微分と無限級数の入れ替え定理] 開区間 $I\subset\mathbb{R}$ 上の関数列 $\{f_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ に対して，$\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n'(x)$ が一様収束して，$\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(x)$ が $F(x)$ に収束していれば，$F'(x)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n'(x)$

が成り立つ．

初めに，

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(ik)e^{ikx} \tag{6.19}$$

が絶対収束しているかどうかを判定しよう．

$$g_k(x)=c_k(ik)e^{ikx},\ M_k=|k\,c_k| \quad (k\in\mathbb{Z}) \tag{6.20}$$

とおく．すると，定理 6.1 において，$M=3$ を考えることによって，

$$|g_k(x)|=M_k \tag{6.21}$$

および

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} M_k=\sum_{k\ne 0}|k\,c_k| \le \sum_{k\ne 0}\frac{1}{2\pi k^2}\int_{-\pi}^{\pi}|f'''(x)|\,dx=\frac{\pi}{3}\int_{-\pi}^{\pi}|f'''(x)|\,dx<\infty \tag{6.22}$$

が従う．よって，コーシー判定法より

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(ik)e^{ikx} \tag{6.23}$$

が絶対収束している．同じく，

$$f_k(x)=c_k(ik)e^{ikx},\ N_k=|k\,c_k| \quad (k\in\mathbb{Z}) \tag{6.24}$$

とおくと，

$$|f_k(x)|=M_k \tag{6.25}$$

および

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} N_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| \le |c_0| + \sum_{k \ne 0} \frac{1}{2\pi k^2} \int_{-\pi}^{\pi} |f''(x)|\,dx = |c_0| + \frac{\pi}{3}\int_{-\pi}^{\pi} |f''(x)|\,dx < \infty \tag{6.26}$$

が従う．よって，コーシー判定法より

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \tag{6.27}$$

が (絶対) 収束している．以上から，微分と無限級数の入れ替え定理が使えて (6.11) が証明された． □

例 6.3. 系 6.2 の (6.11) を示した論法によると，$l \in \mathbb{N}$ のとき，

$$\begin{aligned}
\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{|j^l|}{|j|!} &= 2\sum_{j=1}^{2l+2} \frac{j^l}{j!} + 2\sum_{j=2l+3}^{\infty} \frac{j^l}{j!} \\
&= 2\sum_{j=1}^{2l+2} \frac{j^l}{j!} + 2\sum_{j=2l+3}^{\infty} \frac{j^l}{(j-l)!(j-l+1)(j-l+2)\cdots j} \\
&< 2\sum_{j=1}^{2l+2} \frac{j^l}{j!} + 2\sum_{j=2l+3}^{\infty} \frac{2^l}{(j-l)!} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

$l = 0$ でも

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{|j^l|}{|j|!} = 1 + 2\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} = 2e - 1 < \infty \tag{6.28}$$

であるから，

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|j|!} e^{ijx} \tag{6.29}$$

とおくと，$f(x)$ を定義している関数項級数は項別微分が何度でもできて，特に，$C^\infty(\mathbb{T})$ に属する関数である．このように，三角多項式だけが 2π-周期の $C^\infty(\mathbb{T})$-級関数であるわけではない．

定理 6.1 は多次元化される．定理 7.5 を参照のこと．

第 6 節の問題.

A

問題 23. f が $C^1[-\pi, \pi]$ に属する関数ならフーリエ級数は一様収束することを証明せよ．ただし，$f(\pi) = f(-\pi)$ および $f'(\pi - 0) = f'(\pi + 0) \in \mathbb{R}$ を仮定している．

A

問題 24. g を $[-\ell, \ell]$ 上の有界可測関数 (もしくは連続関数) とする．$G_x(t) = \chi_{[\ell,x]}(t)g(t)$, $\omega = \dfrac{\pi}{\ell}$ とおく．このとき，$x \in (-\ell, \ell)$ に関して一様に

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\ell}^{\ell} G_x(t) e^{-in\omega t}\,dt = 0 \tag{6.30}$$

であることを示せ．

A

問題 25. 関数 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $g(t) := \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{4}(t-2n\pi)^2\right)$, $t\in\mathbb{R}$ で定める．

(1) g を定義している無限和は一様収束することを示せ．
(2) g は周期 2π の C^1-級関数であることを示せ．
(3) g の複素フーリエ係数 $c_n(g)$ を求めよ．

B

問題 26. f を周期 2π の関数で

(6.31)
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi - x}{2} & (0 \le x < \pi\text{のとき}) \\ \dfrac{-\pi - x}{2} & (-\pi \le x < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

を満たしているものとする．次のことを証明せよ．ただし，次の記号を用いること．

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\exp(-ikx)\,dx, \quad S_N[f](x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k(f)\exp(ikx),$$

$$D_N(x) = \sum_{k=-N}^{N}\exp(ikx) : \text{Dirichlet 核}$$

(1) $S_N[f](x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x (D_N(t)-1)\,dt$ が成り立つ．
(2) $\displaystyle\int_0^x D_n(t)\,dt - 2\int_0^x \frac{\sin(nt)}{t}\,dt$ は $n\to\infty$ のときに，$0\le x\le\pi$ に関して一様に 0 に収束する．
(3) $\displaystyle\lim_{N\to\infty} S_N[f]\left(\frac{\pi}{N}\right) = \int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt \approx 1.8519 > \frac{\pi}{2}$

この (3) の現象をギブス (Gibbs) 現象という．

(6.32)
$$\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt \approx 1.8519 > \frac{\pi}{2}$$

は既知としてよい．

B

問題 27. $\alpha > 0$, $f\in C^{\infty}(\mathbb{T})$ とする．

(6.33)
$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\hat{f}(j)e^{ijt}$$

でフーリエ係数 $\hat{f}$ を定義する．もし，$K = \sup\left\{n^{-\alpha n}\sup_{t\in\mathbb{T}}|f^{(n)}(t)| \,:\, n\in\mathbb{N}\right\} < \infty$ であるなら，不等式 $|\hat{f}(j)| \le \displaystyle\inf_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} K\frac{n^{\alpha n}}{|j|^n}$,　$(j\in\mathbb{N})$ が成り立つことを示せ．

7. チェザロ (Cesàro) 総和法

複素数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ に関する次の命題を思い出す．

命題 7.1. $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ が収束するならば，$\left\{\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right\}_{n=1}^\infty$ も収束する．さらに逆が成り立たない．

証明. はじめに，収束列であることから有界列，すなわち，ある $M>0$ が存在して $|a_n| \le M$ が成り立っていると仮定する．任意に $\varepsilon>0$ を与える．$N_1 \in \mathbb{N}$ を $|a_n-\alpha|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ となるようにとる．このように決めた N_1 に対して N_1 より大きい $N_2 \in \mathbb{N}$ を $\dfrac{N_1|\alpha|+N_1M}{N_2}<\dfrac{\varepsilon}{2}$ となるようにとる．すると，

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-\alpha\right| &\le \sum_{j=1}^{N_1}\frac{|a_j|+|\alpha|}{n}+\sum_{j=N_1+1}^{n}\frac{|a_j-\alpha|}{n}\\
&\le \sum_{j=1}^{N_1}\frac{M+|\alpha|}{n}+\sum_{j=N_1+1}^{n}\frac{|a_j-\alpha|}{n}\\
&\le \frac{N_1(M+|\alpha|)}{n}+\sum_{j=N_1+1}^{n}\frac{\varepsilon}{2n}\\
&<\varepsilon
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

逆が成り立たないことを示す反例：$a_n=(-1)^n$ とせよ．$\square$

この原理をフーリエ級数に応用しよう．

11 節で考察するように，フーリエ級数は一般には収束しないが，チェザロ (Césaro) 平均

$$
\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{m=-k}^{k}c_me^{imx}\right) \tag{7.1}
$$

は収束する．それを定式化し，証明しよう．

定理 7.2 (チェザロ平均)**.** $f \in C(\mathbb{T})$ のとき，

$$
f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{m=-k}^{k}c_me^{imx}\right),\ c_m=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-imx}\,dx \tag{7.2}
$$

が一様収束の意味で成り立つ．

証明. 部分和を積分核の言葉で書き表すと，

$$
\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{m=-k}^{k}c_me^{imx}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin\left(\dfrac{2k+1}{2}(x-y)\right)}{2\sin\left(\dfrac{x-y}{2}\right)}f(y)\,dy \tag{7.3}
$$

であるが，

$$
\sum_{k=0}^{n}\sin\left(\frac{2k+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{1}{2}x\right)=\frac{1}{2}(1-\cos[(n+1)x])=\sin^2\left(\frac{n+1}{2}x\right),\ x\notin 2\pi\mathbb{Z} \tag{7.4}
$$

であるから，

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{m=-k}^{k}c_m e^{imx}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\left[\frac{n+1}{2}(x-y)\right]}{2(n+1)\sin^2\left[\frac{1}{2}(x-y)\right]}f(y)\,dy \tag{7.5}$$

となる．特に，$f\equiv 1$ のときはそれに対応する c_m が $c_m=\delta_{m,0}$ で与えられるから，

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\left[\frac{n+1}{2}(x-y)\right]}{2(n+1)\sin^2\left[\frac{1}{2}(x-y)\right]}\,dy=1 \tag{7.6}$$

を意味している．したがって，

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{m=-k}^{k}c_m e^{imx}\right)-f(x)\right|&=\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\left[\frac{n+1}{2}(x-y)\right]}{2(n+1)\sin^2\left[\frac{1}{2}(x-y)\right]}(f(y)-f(x))\,dy\right|\\&=\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}y\right)}{2(n+1)\sin^2\left(\frac{y}{2}\right)}(f(x+y)-f(x))\,dy\right|\end{aligned}$$

となる．$\delta\in(0,1)$ を固定する．すると，

$$\begin{aligned}&\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{m=-k}^{k}c_m e^{imx}\right)-f(x)\right|\\&\le\sup_{x,y\in\mathbb{R},\,|x-y|<\delta}|f(x+y)-f(x)|\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}y\right)}{2(n+1)\sin^2\left(\frac{y}{2}\right)}\,dy\right|\\&\quad+\frac{1}{\pi}\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|\left|\int_{\delta}^{2\pi-\delta}\frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}y\right)}{2(n+1)\sin^2\left(\frac{y}{2}\right)}\,dy\right|\\&\le\sup_{x,y\in\mathbb{R},\,|x-y|<\delta}|f(x+y)-f(x)|+\left(\sin\frac{\delta}{2}\right)^{-2}\frac{2}{n+1}\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|\end{aligned}$$

が得られる．よって，$n\to\infty$ として，

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{m=-k}^{k}c_m e^{imx}\right)-f(x)\right|\right)\le\sup_{x,y\in\mathbb{R},\,|x-y|<\delta}|f(x+y)-f(x)| \tag{7.7}$$

が得られる．$\delta\downarrow 0$ とすれば，

$$(0\le)\limsup_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{m=-k}^{k}c_m e^{imx}\right)-f(x)\right|\right)\le 0 \tag{7.8}$$

となる．つまり，

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{m=-k}^{k}c_m e^{imx}\right)-f(x)\right|=0 \tag{7.9}$$

が得られた． □

系 7.3. 三角多項式は $C(\mathbb{T})$ で稠密である．つまり，任意の周期 2π の関数は三角多項式によって一様近似できる．

定義 7.4 ($\mathcal{D}(\mathbb{T}^n)$)**.** $\mathcal{D}(\mathbb{T}^n)$ は周期 2π の C^∞ 関数全体のなす集合を表す．

定理 7.5 (周期的関数のフーリエ級数展開)**.** $f \in \mathcal{D}(\mathbb{T}^n)$ とすると，

$$f(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \left(\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[0,2\pi]^n} f(y)\, e^{-im\cdot y}\, dy \right) e^{i\, m\cdot x} \tag{7.10}$$

が $\mathcal{D}(\mathbb{T}^n)$ の位相で成立する．

証明. (7.10) のように関数 f が展開されることは 1 変数ごとにみていけば，収束の問題 (無限和の入れ替え) はあるにせよ，できることは少なくともわかる．係数がどの程度速く減少しているかを見る．$\langle m \rangle = \sqrt{m^2+1}$ と書く．部分積分により，

$$\begin{aligned}\int_{[0,2\pi]^n} f(y)\, e^{-im\cdot y}\, dy &= \frac{1}{\langle m \rangle^{2L}} \int_{[0,2\pi]^n} f(y) [\, (1-\Delta)^L\, e^{-im\cdot y}]\, dy \\ &= \frac{1}{\langle m \rangle^{2L}} \int_{[0,2\pi]^n} [\, (1-\Delta)^L\, f(y)\,]\, e^{-im\cdot y}\, dy\end{aligned}$$

だから，任意の $L \in \mathbb{N}$ に対して多項式 $\langle m \rangle^{2L}$ より速く減衰していることがわかる．これより，(7.10) においてすべての偏導関数に関して微分と和の順番が入れ替わり微分と和の順番を入れ替えて得られる級数が一様収束していると結論付けられる． □

通常の総和法と Césaro 総和法とを比較してみると，これらはそれぞれ

$$S_N(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=-N}^{N} e^{ik(x-y)} \right) f(y)\, dy$$
$$\sigma_N(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{N+1} \sum_{l=0}^{N} \left(\sum_{k=-l}^{l} e^{ik(x-y)} \right) f(y)\, dy$$

の $N \to \infty$ における f への収束を論じていることになる．2 者の違いは数列の収束を通じて説明したが，積分核の観点からいうと，通常の総和法の場合は積分核が異符号をとるのに対して，Césaro 総和法は正の積分核を持つという違いがある．積分核の正値性によって，Césaro 総和法は Dirac デルタの性質と似ている性質が得られる．このような積分核は De la Vallee Pousin 核など類似の性質があるものがあるが，ここでは省略する．

第 7 節の問題.

B

問題 28. $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ (もしくは 1 点を除き連続な有界関数) が $|\hat{f}(n)| \le K|n|^{-1}$ を満たしているとする．

(1) 恒等式 $S_n(f,t) = \sigma_n(f,t) + \displaystyle\sum_{j=-n}^{n} \frac{|j|\hat{f}(j)}{n+1} e^{ijt}$ を用いて，$|S_n(f,t)| \le \|f\|_\infty + 2K$ を示せ．

(2) $f(t) = \begin{cases} t & (0 \le t < \pi) \\ t - 2\pi & (\pi \le t < 2\pi) \end{cases}$ のフーリエ級数展開を求めよ．

(3) 不等式 $\displaystyle\sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \sum_{j=1}^{n} \frac{\sin(jt)}{j} \right| \le \frac{\pi}{2} + 1$ を示せ．

B

問題 29. $f \in L^1(\mathbb{T})$ (連続な関数) が $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\hat{f}(0) = 0$ と $\hat{f}(n) = -\hat{f}(n) \geq 0$ を満たしているとする．

(1) $t > 0$ に対して，$F(t) = \displaystyle\int_0^t f(s)\,ds$ とすると，F は 2π-周期の連続関数であることを示せ．

(2) $\hat{F}(n)$ と $\hat{f}(n)$ の関係を調べよ．

(3) $\displaystyle\lim_{N\to\infty} 2\sum_{n=1}^{N}\left(1 - \frac{n}{N+1}\right)\frac{\hat{f}(n)}{n}$ を計算せよ．

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\hat{f}(n)}{n} < \infty$ を示せ．

(5) $\hat{f}(0) = 0$, $\hat{f}(1) = 0$, $\hat{f}(-1) = 0$, $\hat{f}(n+1) = -\hat{f}(-n-1) = \dfrac{1}{\log(n+1)}$, $n \in \mathbb{N}$ となる $f \in L^1(\mathbb{T})$ は存在しないことを示せ．

(6) すべての実数 $t \in \mathbb{R}$ に対して，$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin(nt)}{\log n}$ は収束することを示せ．

B

問題 30. $\mathbb{T}$ 上の連続関数 f を $\mathbb{R}$ 上の周期 2π の連続関数とみなしたとき，不等式

$$\mathrm{Lip}_\alpha : |f(t) - f(s)| \leq K|t-s|^\alpha,\ t, s \in \mathbb{R} \tag{7.11}$$

を満たしているとする．

(1) $0 < \alpha < 1$ のとき，$|\sigma_n(f,t) - f(t)| \leq \dfrac{\pi+1}{1-\alpha}\pi^\alpha K(1+n)^{-\alpha}$ を証明せよ．

(2) $\alpha = 1$ のとき，$|\sigma_n(f,t) - f(t)| \leq 2\pi K\dfrac{\log(n+1)}{n}$ を証明せよ．

(3) $\alpha > 1$ のとき，f は定数関数であることを証明せよ．

【注意】 $\dfrac{\sin^2(n+1)t}{\sin^2 t} \leq \min\left(\dfrac{4}{\pi^2 t}, (n+1)^2\right)$ を用いるとよい．

B

問題 31 (ベルンスタインの不等式)**.** $\{a_j\}_{j=-n}^{n}$ を有限複素数列とするとき，以下の問に答えよ．

(1) $t \in \mathbb{R}$ の関数 $\displaystyle\sum_{j=-n}^{n} a_j\,e^{ijt}$ が実数値関数であると仮定する．$[0, 2\pi)$ における

$$\sum_{j=-n}^{n} a_j\,e^{ijt} = 0 \tag{7.12}$$

の解の個数が $2n$ を超えないことを示せ．

(2) $t \in \mathbb{R}$ の関数 $\displaystyle\sum_{j=-n}^{n} a_j\,e^{ijt}$ が実数値関数であるとして，不等式

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\sum_{j=-n}^{n} j a_j\,e^{ijt}\right| \leq n\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\sum_{j=-n}^{n} a_j\,e^{ijt}\right| \tag{7.13}$$

を証明せよ．

(3) 不等式

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\sum_{j=-n}^{n} ja_j\, e^{ijt}\right| \le 2n\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\sum_{j=-n}^{n} a_j\, e^{ijt}\right| \tag{7.14}$$

を証明せよ.

B

問題 32.

(1) (オリビエ (Olivier) の定理) $\{a_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ を 0 に単調減少して収束する数列で, $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} a_j < \infty$ を満たしているとする.

(a) $a_j = \displaystyle\sum_{k=j}^{\infty}(a_k - a_{k+1})$ であることを用いて, $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} a_j = \sum_{k=1}^{\infty} k(a_k - a_{k+1})$ を証明せよ.

(b) $\displaystyle\lim_{j\to\infty} ja_j = 0$ を証明せよ.

(2) $\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ は次の条件

$$\text{(i)}\, a_j = a_{-j}, \quad (j\in\mathbb{Z}) \quad \text{(ii)}\, a_{j+1} + a_{j-1} \ge 2a_j, \quad (j\in\mathbb{N}) \tag{7.15}$$

$$\text{(iii)}\, a_j \ge 0, \quad (j\in\mathbb{Z}) \quad \text{(iv)}\, \lim_{j\to\infty} a_j = 0 \tag{7.16}$$

を満たしている実数列とする. また, $f(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n)K_{n-1}(t)$ とおく.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n) < \infty$ を示せ.

(b) $\hat{f}(n) = a_{|n|} \quad (n\in\mathbb{Z})$ を示せ.

(c) $n \ge 2$ もしくは $n \le 2$ のときに, $\hat{f}(n) = \dfrac{1}{\log|n|}$ となる $f \in L^1(\mathbb{T})$ が存在することを示せ.

8. L^p-空間

本節の内容はルベーグ積分の未習者には難しいが，次のようなことを心得ておけばさほど問題になることはないであろう．

(1) L^1 とは絶対値をとった関数の積分が有限である「関数」全体である．
(2) L^p とは絶対値をとって p 乗した関数の積分が有限である「関数」全体である．

例として，

$$f_1(t) = t^{-1}, \quad 0 \le t < 2\pi \tag{8.1}$$

は L^1 に属していない．$1 < q < p < \infty$ とする．

$$f_p(t) = t^{-1/p}, \quad 0 \le t < 2\pi \tag{8.2}$$

は L^q に属しているが，L^p には属していない．

再び，フーリエ級数の収束問題を考える．まず，2π-周期の関数 f のフーリエ係数

$$c_k(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\,dx \tag{8.3}$$

を考える．「関数」が与えられた時に，如何にして $c_k(f)$ を与えている積分に意味を持たせるかという問題は重要である．実際に，連続関数の枠組みで物事を考えている分にはこのような問題は考えなくてもよい．しかし，有理数全体の特性関数のように，積分ができる，できないの問題が発生することは，数学では結構多い．連続関数，もしくはリーマン積分関数から出発して，何らかの「連続性」を持って $c_k(f)$ を定義している積分を考察することは意味がある．この時に，重要となるのは絶対値をとって積分が可能であるという概念である．これがどうして重要なのかというと，積分の三角不等式

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx - \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx \right| \le \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|\,dx \tag{8.4}$$

を用いて，$c_k(f)$ の意味合いを拡張することになるからである．

話は，少し変わって，数学において完備化というものは非常に強力な道具である．解析学を学習してから後顧してみると，平均値の定理，中間値の定理，リーマン積分の意味合いなどは最終的には「実数が有理数の完備化として得られる」という事実に立脚している．まずは，実数における完備化とは何かを復習しよう．

定義 8.1 (有理数の完備化)**.**

(1) 実数におけるコーシー列 $\{q_j\}_{j=1}^{\infty}$ とは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある N が存在して，$j, k \ge N$ の時に，$|q_j - q_k| < \varepsilon$ が成り立つ点列 $\{q_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ のことをいう．
(2) 有理数の完備化とは，コーシー列の集まりをいう．ただし，2 つのコーシー列 $\{q_j\}_{j=1}^{\infty}$ と $\{r_j\}_{j=1}^{\infty}$ が次の条件を満たしているとき，同じとみなす．
  [相等条件] 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある N が存在して，$j \ge N$ の時に，$|q_j - r_j| < \varepsilon$ が成り立つ．
(3) 有理数の完備化を実数という．

実際に有理数の完備化に関して解析学で習ったことは，これだけではなくて，演算の性質や大小関係などがあったが，一度これらの演算や大小などの機能は忘れることにする．つまり，これから完備化とは何かを説明するために，不要なものを捨象することにする．

定義 8.2 (距離空間)**.** (X, d) が距離空間であるとは，以下の条件を満たしていることである．

(1) X は集合である．
(2) $d : X \times X \to [0, \infty)$ は写像で

(a) $d(x,x)=0$, $x \neq y$ ならば，$d(x,y)>0$
(b) $d(x,y)=d(y,x)$ がすべての $x,y \in X$ に関して成り立つ．
(c) $d(x,z) \le d(x,y)+d(y,z)$ がすべての $x,y,z \in X$ に関して成り立つ．
を満たしている写像である．

実数全体などは，距離空間になることは三角不等式や絶対値を考えれば確かにわかる．そこで，この距離空間という抽象化された枠組みの中での完備化を定義しよう．

定義 8.3 (距離空間における完備化)**.** (X,d) を距離空間とする．

(1) X におけるコーシー列 $\{q_j\}_{j=1}^\infty$ とは，任意の $\varepsilon>0$ に対して，ある N が存在して，$j,k \ge N$ の時に，$d(q_j,q_k)<\varepsilon$ が成り立つ点列 $\{q_j\}_{j=1}^\infty \subset X$ のことをいう．
(2) X の完備化とは，コーシー列の集まりをいう．ただし，2つのコーシー列 $\{q_j\}_{j=1}^\infty$ と $\{r_j\}_{j=1}^\infty$ が次の条件を満たしているとき，同じとみなす．
[相等条件] 任意の $\varepsilon>0$ に対して，ある N が存在して，$j \ge N$ の時に，$d(q_j,r_j)<\varepsilon$ が成り立つ．

この抽象化された距離空間における完備化に留意して，再び積分とは何か，関数とは何かを考える．まず，関数とは何かと考えた時に，積分と連続関数を介して，

連続関数列 $\{f_j\}_{j=-\infty}^\infty$ の完備化

と考えるといくつかの問題を生じる．例を挙げてみてみよう．

(1) $f_j(x)=\sin^{2j} x$ を $[0,2\pi]$ で考えると，

$$\lim_{j\to\infty}\int_0^{2\pi}|\sin^{2j}x|\,dx=\lim_{j\to\infty}4\cdot\frac{2j-1}{2j}\cdot\frac{2j-3}{2j-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=0 \tag{8.5}$$

だから，f_j は 0 に収束しているといえる．だが，f_j は 0 には各点収束していない．
(2) $f_j=\chi_{\{2^{-j},2\cdot 2^{-j},\cdots,(2^j-1)\cdot 2^{-j},2^j\cdot 2^{-j}\}}$ とおくと，先ほどと同じ理由で f_j は 0 に収束しているといえる．f_j の各点収束先は $A=\{k\,2^{-j}\,:\,k=1,2,\cdots,2^j,\,j\in\mathbb{N}\}$ としたときに，χ_A と表される．ところが，χ_A はリーマン可積分ではない．

このような「変な」例の原因は,「少数の」特異点である．この「少数の」という言葉を定義するのに，ほとんどいたるところという概念を用いる．

定義 8.4.

(1) $E \subset \mathbb{T}$ が 0 集合であるとは，任意の $\varepsilon>0$ に対して可算個の区間 $I_1,I_2,\cdots,I_j,\cdots$ が存在して，

$$\sum_{j=1}^\infty |I_j|<\varepsilon,\ E\subset\bigcup_{j=1}^\infty I_j \tag{8.6}$$

が成り立つことである．
(2) 性質∗∗がほとんどいたるところ成立するとは，∗∗が成立しない点全体が 0 集合をなすことである．
(3) a.e. とはほとんどいたるところの省略形である．英語では，almost everywhere という．フランス語では presque partout という．

次の定理が示すように，ほとんどいたるところという言葉は柔軟に使えることがわかる．

定理 8.5. 連続関数列 $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ が $\displaystyle\sum_{j=1}^\infty\int_{\mathbb{T}}|f_j(x)|\,dx<\infty$ を満たしていれば，$\displaystyle\sum_{j=1}^\infty|f_j(x)|$ はほとんどいたるところ有限である．

証明. f_j に対して，2^k の度合いの近似 $f_{j,k}$ を以下の方法で定める．

$$f_{j,k}(x) = \sum_{l=1}^{2^k} \chi_{[2\pi(l-1)2^{-k}, 2\pi l\cdot 2^{-k})}(x) f_j(2\pi(l-1)2^{-k}). \tag{8.7}$$

すると，各 f_j の一様連続性によって，次のような単調増大列 $\{k(j)\}_{j=1}^\infty$ を構成できる．

$$|f_{j,k(j)}(x) - f_j(x)| \le 2^{-j}. \tag{8.8}$$

$g_j = f_{j,k(j)}$ とおくと，(8.8) によって，

$$\sum_{j=1}^\infty |f_j(x)| < \infty \iff \sum_{j=1}^\infty |g_j(x)| < \infty \tag{8.9}$$

がすべての $x \in \mathbb{T}$ に対して成り立つ．

$$E := \left\{ x \in \mathbb{T} : \sum_{j=1}^\infty |f_j(x)| = \infty \right\} = \left\{ x \in \mathbb{T} : \sum_{j=1}^\infty |g_j(x)| = \infty \right\}$$

とおこう．

$$E_T := \left\{ x \in \mathbb{T} : \sum_{j=1}^\infty |g_j(x)| > T \right\} \tag{8.10}$$

とすると，任意の $x \in E_T$ に対して，

$$\sum_{j=1}^{x(T)} |g_j(x)| > T \ge \sum_{j=1}^{x(T)-1} |g_j(x)| \tag{8.11}$$

となる $x(T)$ が存在する．すると，g_j の作り方から，

$$\left\{ x \in \mathbb{T} : \sum_{j=1}^{x(T)} |g_j(x)| > T \right\} \tag{8.12}$$

は有限個の区間の和集合として表される．

このような区間のうち，任意に有限個とってもその和はチェビシェフ (Chebyshev) の不等式によって，

$$\frac{1}{T} \sum_{j=1}^\infty \int_{\mathbb{T}} |g_j(x)|\, dx \tag{8.13}$$

を超えない．したがって，E は 0 集合である． □

同様な論法で，次を示すことができる．

命題 8.6. $\{f_j\}_{j=1}^\infty \subset C(\mathbb{T})$ が，

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{T}} |f_j(x)|\, dx = 0 \tag{8.14}$$

を満たしているとき，ある 0 集合と部分列 $\{f_{j(k)}\}_{k=1}^\infty$ が存在して，$\{f_{j(k)}\}_{k=1}^\infty$ はほとんどいたるところ収束している．

このようにして，ほとんどいたるところという言葉を付けて,「少数の」点に起こる問題を回避すれば，収束の問題は解決されると思われる．積分の定義をする際に，

$$d(f,g) = \int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)|\, dx, \quad (f, g \in C(\mathbb{T})) \tag{8.15}$$

による完備化をすればよいように思えるが，第 9 節で示すように，2 乗して積分を考えるという操作も有効である．$p=1,2$ のときに限定せず，もっと柔軟に p-乗も考えることにしよう．

定義 8.7 (L^p-ノルム)**.** $1 \le p < \infty$ とする．$f \in C(\mathbb{T})$ に対して，$\|f\|_{L^p(\mathbb{T})} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$ を f の L^p-ノルムという．

初めに三角不等式を示す．

定理 8.8 (ミンコフスキー (Minkowski) の不等式)**.** $1 \le p < \infty$ とするとき，すべての $f, g \in C(\mathbb{T})$ に対して $\|f+g\|_{L^p(\mathbb{T})} \le \|f\|_{L^p(\mathbb{T})} + \|g\|_{L^p(\mathbb{T})}$，つまり

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)+g(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{8.16}$$

が成り立つ．

証明. $f, g, f+g$ のどれか一つでも 0 関数であるなら，この不等式は自明であるから，すべてが 0 関数ではないとしてよい．定義によって，

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{T})} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} = \inf\left\{\lambda > 0 \,:\, \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f(x)|^p}{\lambda^p} \, dx \le 1\right\} \tag{8.17}$$

である．そこで，1 変数関数 $t \in [0,\infty) \mapsto t^p \in [0,\infty)$ の凸性によって，

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f(x)+g(x)|^p}{(\|f\|_{L^p(\mathbb{T})} + \|g\|_{L^p(\mathbb{T})})^p} \, dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\|f\|_{L^p(\mathbb{T})}}{\|f\|_{L^p(\mathbb{T})} + \|g\|_{L^p(\mathbb{T})}} \frac{f(x)}{\|f\|_{L^p(\mathbb{T})}} + \frac{\|g\|_{L^p(\mathbb{T})}}{\|f\|_{L^p(\mathbb{T})} + \|g\|_{L^p(\mathbb{T})}} \frac{g(x)}{\|g\|_{L^p(\mathbb{T})}} \right|^p dx \\
&\le \frac{\|f\|_{L^p(\mathbb{T})}}{\|f\|_{L^p(\mathbb{T})} + \|g\|_{L^p(\mathbb{T})}} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f(x)}{\|f\|_{L^p(\mathbb{T})}} \right|^p dx + \frac{\|g\|_{L^p(\mathbb{T})}}{\|f\|_{L^p(\mathbb{T})} + \|g\|_{L^p(\mathbb{T})}} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{g(x)}{\|g\|_{L^p(\mathbb{T})}} \right|^p dx \\
&\le \frac{\|f\|_{L^p(\mathbb{T})}}{\|f\|_{L^p(\mathbb{T})} + \|g\|_{L^p(\mathbb{T})}} + \frac{\|g\|_{L^p(\mathbb{T})}}{\|f\|_{L^p(\mathbb{T})} + \|g\|_{L^p(\mathbb{T})}} = 1
\end{aligned}$$

が得られる．したがって，$\|f+g\|_{L^p(\mathbb{T})} \le \|f\|_{L^p(\mathbb{T})} + \|g\|_{L^p(\mathbb{T})}$ である． □

L^p-空間を次のように導入する．

定義 8.9. $1 \le p < \infty$ のとき，$C(\mathbb{T})$ の $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{T})}$ による完備化を $L^p(\mathbb{T})$ と表す．

定義によって，$f \in L^p(\mathbb{T})$ とは $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{T})}$-コーシー列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ のことである．また，これは次のようなものであると考えてよい．$f \in L^p(\mathbb{T})$ とは $\mathbb{T}$ 上定義された関数で，ある $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ という $L^p(\mathbb{T})$ が存在して，

$$\lim_{j,k\to\infty} \|f_j - f_k\|_{L^p(\mathbb{T})} = 0, \quad \text{ほとんどいたるところ } f(x) = \lim_{j\to\infty} f_j(x) \tag{8.18}$$

が成り立つ．

命題 8.10. $1 \le p < \infty$ のとき，三角多項式は $L^p(\mathbb{T})$ で稠密である．

証明. 三角多項式は $C(\mathbb{T})$ で稠密であるからである． □

補題 8.11. $1 \le p < \infty$ とするとき，$\|f\|_1 \le (2\pi)^{1-\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}$ が成り立つ．

証明. $a>0$ のとき，$a \le \frac{1}{p}a^p + \left(1-\frac{1}{p}\right)$ であるから，積分の単調性によって，$\lambda > 0$ に対して

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\lambda f(x)|\, dx \le \frac{1}{p}\int_{-\pi}^{\pi} |\lambda f(x)|^p\, dx + 2\pi\left(1-\frac{1}{p}\right) \tag{8.19}$$

となる．λ で両辺を割って

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\lambda f(x)|\, dx \le \frac{\lambda^{p-1}}{p}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p\, dx + 2\pi\left(1-\frac{1}{p}\right)\lambda^{-1} \tag{8.20}$$

であるが，λ に関して右辺を最小にすると $\|f\|_1 \le (2\pi)^{1-\frac{1}{p}}\|f\|_{L^p(\mathbb{T})}$ が得られる． □

定義 8.12. $n \in \mathbb{N}$, $1 \le p < \infty$ とする．線形汎関数

$$f \in C(\mathbb{T}) \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\, dx \in \mathbb{C} \tag{8.21}$$

を連続性によって $L^p(\mathbb{T})$ から $\mathbb{C}$ への汎関数に拡張する．

第 8 節の問題.

A

問題 33. 関数系 $\{\cos(kx)\}_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \cup \{\sin(kx)\}_{k\in\mathbb{N}}$ の $L^2([-1,1])$ における稠密性を認めて，以下の問に答えよ．

(1) $\mathrm{span}\{1, x, x^2, \cdots, \}$ は $L^2([-1,1])$ で稠密であることを示せ．
(2) $L^2([-1,1])$ において $1, x, x^2, \cdots$ をグラム・シュミットの直交化法で直交化したものを $e_0(x), e_1(x), \cdots$ とおく．$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ とすると，$e_n(x) = \sqrt{n+\frac{1}{2}}P_n(x)$ であることを示せ．

B

問題 34. $k \in \{0, 1, 2, \cdots\}$ とする．

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を可測関数とする．任意の $\xi \in (-1,1)$ に対して $|f(x)|e^{|\xi x|} \in L^1(\mathbb{R}_x)$ であるとする．任意の多項式 $P(x)$ に対して，$\int_{\mathbb{R}} f(x)P(x)\, dx = 0$ であるなら，$f(x) = 0$, $a.e. x \in \mathbb{R}$ であることを証明せよ．
(2) $(0,\infty)$ 上の測度 $d\mu(x) = x^k e^{-x}\, dx$ を考える．$\mathrm{span}\{1, x, x^2, \cdots\}$ は $L^2((0,\infty), d\mu)$ で稠密であることを示せ．
(3) $L^2((0,\infty), d\mu)$ において，$1, x, x^2, \cdots$ をグラム・シュミットの直交化法で直交化したものを $e_0(x), e_1(x), \cdots$ とおく．$L_n^k(x) = \frac{x^{-k}e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^{k+n}e^{-x})$ としたとき，

$$e_n(x) = (-1)^n \frac{(k+n)!}{n!} L_n^k(x) \tag{8.22}$$

であることを証明せよ．

【注意】複素解析の解析接続を用いる．

B

問題 35.

(1) $1 \le p < \infty$ とする．$g \in L^p(\mathbb{T})$ に対して，数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ をすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$a_n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} \ge 2a_n,\ \|\sigma_{a_n}(g) - g\|_{L^p(\mathbb{T})} \le 2^{-n} \tag{8.23}$$

となるようにとる．このとき，$f = g + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(g - \sigma_{a_n}(g))$ とおくと，$f \in L^p(\mathbb{T})$ であることを示せ．また，$\hat{f}(n)$ と $\hat{g}(n)$ の関係を調べよ．

(2) $1 \le p < \infty$ とする．任意の $g \in L^p(\mathbb{T})$ は $g = h_1 * h_2,\ h_1 \in L^1(\mathbb{T}),\ h_2 \in L^p(\mathbb{T})$ なる分解が可能であることを示せ．

9. L^2-関数のフーリエ級数展開

$(A_1+A_2+\cdots+A_N)^2$ の展開公式

$$(A_1+A_2+\cdots+A_N)^2 = {A_1}^2+{A_2}^2+\cdots+{A_N}^2 \tag{9.1}$$

は間違いで，正しくは $(A_1+A_2+\cdots+A_N)^2$ の展開公式

$$(A_1+A_2+\cdots+A_N)^2 = {A_1}^2+{A_2}^2+\cdots+{A_N}^2+2A_1A_2+2A_1A_3+\cdots+2A_{N-1}A_N$$

である．しかし，第 5 節で得た公式を用いると $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_N,b_1,b_2,\cdots,b_N$ を複素数定数とするとき，

$$\int_0^{2\pi}\left|\sum_{j=0}^N a_j\cos(jx)+\sum_{j=1}^N b_j\sin(jx)\right|^2 dx = 2\pi {a_0}^2+\pi\sum_{j=1}^n({a_j}^2+{b_j}^2) \tag{9.2}$$

が成り立つ．同様に，$c_{-N},c_{-N+1},\cdots,c_1,c_2,\cdots,c_N$ を複素数定数とするとき，

$$\int_0^{2\pi}\left|\sum_{j=-N}^N c_j e^{ijx}\right|^2 dx = 2\pi\sum_{j=-N}^N |c_j|^2 \tag{9.3}$$

が成り立つ．解析学においては，$N\to\infty$ とする極限操作ができるかどうかは慎重に議論しないといけないが，次の定理はそれができることを主張している．

定理 9.1. $f\in L^2(\mathbb{T})$ に対して，そのフーリエ級数展開

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iny}\,dy\right)e^{inx} \tag{9.4}$$

は $L^2(\mathbb{T})$ 収束している．とくに，

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx = 2\pi\sum_{j=-\infty}^{\infty}|c_j|^2 \tag{9.5}$$

が成り立つ．

証明. $f\in L^2(\mathbb{T})$ とする．

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x)-\sum_{n=-N}^N\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iny}\,dy\right)e^{inx}\right|^2 dx \\
&=\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx-\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=-N}^N\overline{\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iny}\,dy\right)}e^{inx}f(x)\,dx \\
&\quad-\sum_{n=-N}^N\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iny}\,dy\right)\overline{e^{inx}f(x)}\,dx+\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{n=-N}^N\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iny}\,dy\right)e^{inx}\right|^2 dx \\
&=\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx-2\pi\sum_{n=-N}^N\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iny}\,dy\right|^2
\end{aligned}$$

である．$f \in L^2(\mathbb{T})$ と $\varepsilon > 0$ が与えられると，命題8.10より三角多項式 P が存在して，$\|f-P\|_2 \le \varepsilon$ となる．N が P の次数より大きいならば，

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - \sum_{n=-N}^{N} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny}\, dy \right) e^{inx} \right|^2 dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left| (f(x)-P(x)) - \sum_{n=-N}^{N} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(y)-P(y)) e^{-iny}\, dy \right) e^{inx} \right|^2 dx \\
&\le \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)-P(x)|^2\, dx \le \frac{\varepsilon^2}{2\pi}
\end{aligned}$$

となる．よって，$\left\| f - \sum_{n=-N}^{N} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny}\, dy \right) e^{in\cdot} \right\|_2 \le \varepsilon$ である． □

本節の内容は多次元化できるので，定式化をしておこう．

多次元において，周期が 2π の関数とは，すべての $m \in \mathbb{Z}^n$ に対して $f(x) = f(x+2\pi m)$ を満たしている関数のことである．ここでは，$\mathbb{T}^n := [0,2\pi)^n$ と定めて，周期 2π の関数を調べていくことにする．

定義 9.2 ($L^p(\mathbb{T}^n)$, $C(\mathbb{T}^n)$, $C^k(\mathbb{T}^n)$)**.** $1 \le p \le \infty$ とする．このとき，

$$L^p(\mathbb{T}^n) := \left\{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \,:\, f \text{ は周期 } 2\pi \text{ で，} \quad \|f\|_{L^p(\mathbb{T}^n)} < \infty \right\}, \tag{9.6}$$

と定義する．ただし，ノルム $\|f\|_{L^p(\mathbb{T}^n)}$ は

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{T}^n)} := \left(\int_{[0,2\pi]^n} |f(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \tag{9.7}$$

で与える．$p = \infty$ の時は

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n)} := \inf\{\lambda > 0 \,:\, \text{ほとんどすべての } x \in \mathbb{R}^n \text{ に対して } |f(x)| < \lambda \text{ が成り立つ}\}$$

と定める．$C(\mathbb{T}^n) := L^\infty(\mathbb{T}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$ とおいて，ノルムは L^∞ のノルムを用いる．すなわち，$f \in C(\mathbb{T}^n)$ に対して，$\|f\|_{C(\mathbb{T}^n)} := \|f\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n)}$ とする．

さらに，$k \in \mathbb{N}_0$ のとき，

$$C^k(\mathbb{T}^n) := C^k(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{T}^n) \tag{9.8}$$

と定め，ノルムは $\|f\|_{C^k(\mathbb{T}^n)} := \sum_{\alpha \in {\mathbb{N}_0}^n,\, |\alpha| \le k} \|\partial^\alpha f\|_{C(\mathbb{T}^n)}$ で与える．

第 9 節の問題.

A

問題 36. $[-\pi,\pi]$ で定義された関数 f の $L^2([-\pi,\pi])$ ノルムを $\|f\| = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}}$ で与える．

(1) コーシーシュワルツの不等式を証明せよ．
(2) 内積の連続性を証明せよ．
(3) フーリエ級数を $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(inx)$ で与えるとき，$\langle f, g \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) \overline{c_n(g)}$ で与えられることを証明せよ．ただし，$f = g$ の場合は認めてしまって構わない．

A

問題 37. f は周期 2π の関数で，$x \in [-\pi, \pi)$ では $f(x) = |x|$ とする．この f のフーリエ級数を用いて，$\dfrac{\pi^4}{96} = \dfrac{1}{1^4} + \dfrac{1}{3^4} + \dfrac{1}{5^4} + \dfrac{1}{7^4} + \cdots$ を示せ．

A

問題 38. $|x| < \pi$ で定義された次の関数のフーリエ級数展開を書け．さらに，パーセバルの等式を具体的に書き下し，何がわかるか説明せよ．

(1) $f(x) = x$
(2) $f(x) = x^2$
(3) $f(x) = |x|$
(4) $f(x) = \cos(\mu x)$

但し，(4) においては，$\mu \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ とする．

A

問題 39. 次の等式を示せ．

(1) $\theta \in [0, 2\pi]$ とするとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n^2} = \frac{(\theta - \pi)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}$ が成り立つ．
(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ が成り立つ．

10. 絶対収束フーリエ級数

関数 f のフーリエ級数 $f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)e^{ikx}$ において，級数が絶対収束している状況を考えよう．絶対収束とは，

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)e^{ikx}| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)| < \infty \tag{10.1}$$

が成り立つことを言うが，この場合はたとえば

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - \sum_{k=-N}^{N} c_k(f)e^{ikx} \right|^2 dx = 0 \tag{10.2}$$

より，

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)e^{ikx} \quad (\text{絶対収束}) \tag{10.3}$$

となる．さて，本論に入る前に，絶対収束に関して以下のことを復習しておこう．

定理 10.1. $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} a_k$ と $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} b_k$ がそれぞれ絶対収束するならば，$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \left(\sum_{l\in\mathbb{Z}^n} a_l b_{k-l} \right)$ を定義している和

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}^n} a_l b_{k-l} \quad (k \in \mathbb{Z}^n) \quad と \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} (\cdots) \tag{10.4}$$

は絶対収束していて，

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \left(\sum_{l\in\mathbb{Z}^n} a_l b_{k-l} \right) = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} a_k \right) \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} b_k \right) \tag{10.5}$$

が成り立つ．

定理 10.1 は解析学の時間にやる定理なので，既習事項とする．

本節の内容は多次元に拡張することもできるので，本節では以後 n 次元を考えることにしよう．

定義 10.2. $\mathbb{A}(\mathbb{T}^n)$ で $f \in C(\mathbb{T}^n)$ で $\|f\|_{\mathbb{A}(\mathbb{T}^n)} = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} |\hat{f}(m)|$ が有限なもの全体とする．

定義 10.2 において正項級数を扱っているので，和の取り方は自由である．

代数学との関連を意識しながら，$\mathbb{A}(\mathbb{T}^n)$ の重要な性質を述べる．

定義 10.3. 和と呼ばれる演算 $+$ と積と呼ばれる演算 $\cdot$ が備わっている集合 A が (可換) 環であるとは以下の条件を満たしていることである．

(1) $0_A, 1_A$ の存在：
 (a) すべての $a \in A$ に対して，$0_A + a = a + 0_A = a$ が成り立つ．
 (b) すべての $a \in A$ に対して，$1_A \cdot a = a \cdot 1_A = a$ が成り立つ．
(2) すべての $a, b \in A$ に対して，$a + b = b + a$ が成り立つ．
(3) すべての $a, b, c \in A$ に対して，$(a + b) + c = a + (b + c)$ が成り立つ．
(4) すべての $a \in A$ に対して，$-a \in A$ と呼ばれる元が存在して，$a + (-a) = (-a) + a = 0_A$ が成り立つ．
(5) すべての $a, b, c \in A$ に対して，$(ab)c = a(bc)$ が成り立つ．

(6) すべての $a,b,c \in A$ に対して，$a(b+c) = ab + ac$ が成り立つ．
(7) すべての $a,b,c \in A$ に対して，$(a+b)c = ac + bc$ が成り立つ．
(8) すべての $a,b \in A$ に対して，$ab = ba$ が成り立つ．

1_A の存在を仮定してはいけないケースもあり得るが，ここでは 1_A が存在すると仮定する．また，行列環のように非可換なものもあるがここではそれは扱わない．

以下，簡単な例を与える．

(1) $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はすべて環の構造を持つ．
(2) $\mathbb{Z}[X]$ で $\mathbb{Z}$-係数の多項式全体とすると，やはり環の構造を持つ．$\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X], \mathbb{C}[X]$ も同じである．
(3) $\mathbb{N}$ は環の構造を持たない．

定理 10.4. $\mathbb{A}(\mathbb{T}^n)$ は環構造を持つ．より具体的には，

$$\|f \cdot g\|_{\mathbb{A}(\mathbb{T}^n)} \le \|f\|_{\mathbb{A}(\mathbb{T}^n)} \cdot \|g\|_{\mathbb{A}(\mathbb{T}^n)} \quad (f, g \in \mathbb{A}(\mathbb{T}^n)) \tag{10.6}$$

である．

このようにノルムを備えていて，(10.6) を満たしている環をノルム環という．

証明. 定理 10.1 によると，

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k(f) e^{ikx}, \quad g(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k(g) e^{ikx} \tag{10.7}$$

と表した時に，

$$f(x)g(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}^n} c_l(f) e^{ilx} c_{k-l}(g) e^{i(k-l)x} \right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}^n} c_l(f) c_{k-l}(g) \right) e^{ikx} \tag{10.8}$$

が成り立ち，これは絶対収束である．したがって，少なくともこのことから $\mathbb{A}(\mathbb{T}^n)$ は環構造を持つことがわかる．さらに，

$$c_k(f \cdot g) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} c_l(f) c_{k-l}(g) \tag{10.9}$$

となる．したがって，三角不等式によって，

$$|c_k(f \cdot g)| \le \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} |c_l(f)| \cdot |c_{k-l}(g)| \tag{10.10}$$

となる．(10.10) を k に亘って足せば，(10.6) が得られる． □

以下の問題が示すように絶対収束フーリエ級数をとってもいろいろなものがある．

第 10 節の問題.

B

問題 40. $0 < \alpha < 1$ に対して

$$w(x) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n\alpha} \cos(2^n x) \tag{10.11}$$

は α-次のヘルダー連続関数であることを示せ．つまり，w は有界で，

$$|w(x) - w(y)| \le C\,|x-y|, \quad (x, y \in \mathbb{R}) \tag{10.12}$$

となる実数 $C > 0$ が存在することを示せ．

A

問題 41. $f, g \in L^2(\mathbb{T})$ のとき，$f * g(t) = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t-s)g(s)\,ds$ で与えられる $f * g$ は $\mathbb{A}(\mathbb{T})$ に属することを示せ.

B

問題 42. $\mathbb{A}(\mathbb{T})$ の有界列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が与えられたとする．$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が f に一様収束するとして以下の問に答えよ.

(1) $\|f\|_{\mathbb{A}(\mathbb{T})} \le \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{\mathbb{A}(\mathbb{T})}$ を示せ．とくに，$f \in \mathbb{A}(\mathbb{T})$ である.
(2) $\|f\|_{\mathbb{A}(\mathbb{T})} = \lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\|_{\mathbb{A}(\mathbb{T})}$ と仮定するとき，$\lim\limits_{n\to\infty} \|f - f_n\|_{\mathbb{A}(\mathbb{T})} = 0$ であることを示せ.
(3) 一般には $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - f_n\|_{\mathbb{A}(\mathbb{T})} = 0$ は成り立たないことを例示せよ.

B

問題 43. 関数列 $\{P_m\}_{m=0,1,\cdots}$ と $\{Q_m\}_{m=0,1,\cdots}$ を帰納的に $P_0(t) = Q_0(t) \equiv 1$,

$$P_{m+1}(t) = P_m(t) + \exp(i2^m t)Q_m(t),\ Q_{m+1}(t) = P_m(t) - \exp(i2^m t)Q_m(t) \tag{10.13}$$

で定めていく．さらに，$m = 1, 2, \cdots$ に対して $f_m(t) = P_m(t) - P_{m-1}(t)$ とおき，$f = \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} f_m$ とする.

(1) $m = 0, 1, \cdots$ に対して $|P_m(t)|^2 + |Q_m(t)|^2 = 2^{m+1}$ を示せ.
(2) $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty} \in \{-1, 1\}$ が存在して，$P_m(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2^m-1} \varepsilon_k e^{ikt}$ が成り立つことを示せ.
(3) $f \notin \mathbb{A}(\mathbb{T})$ を示せ.
(4) $f \in C(\mathbb{T})$ を示せ.

B

問題 44. $0 < a \le \pi$ と $-\pi \le t \le \pi$ に対して，$\Delta_a(t) = \dfrac{1}{a}\max(0, a - |t|)$ とおく.

$$\mathscr{Z} = \left\{ \sum_{j=1}^{N} k_j \Delta_{a_j} \ :\ N \in \mathbb{N}\text{ で，} a_1, a_2, \cdots, a_N \in [0, \pi] \text{ と } k_1, k_2, \cdots, k_N \ge 0 \right\} \tag{10.14}$$

Δ_a を $\mathbb{R}$ 上の 2π-周期関数とみなす.

(1) $\Delta_a \in \mathbb{A}(\mathbb{T})$ であり，$\|\Delta_a\|_{\mathbb{A}(\mathbb{T})} = 1$ を示せ.
(2) $f \in C(\mathbb{T})$ を偶関数で，$t+h, t-h \in [-\pi, \pi]$ で $f(t+h) + f(t-h) \ge 2f(t)$ が成り立つような関数とする．このような関数は $\mathscr{Z}$ に属する関数によって一様近似されることを示せ.
(3) (2) の関数 f は $\mathbb{A}(\mathbb{T})$ に属していて，$\|f\|_{\mathbb{A}(\mathbb{T})} = f(0)$ を満たしていることを示せ.

A

問題 45. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = \frac{\pi^2}{6}$ を既知として，$\|f\|_{\mathbb{A}(\mathbb{T})} \le \|f\|_{L^1(\mathbb{T})} + \dfrac{\pi}{\sqrt{3}}\|f'\|_{L^2(\mathbb{T})}$, $f \in C^1(\mathbb{T})$ を示せ.

11. L^1-関数と連続関数のフーリエ級数展開

L^1-関数はべき乗をしないという点から非常に基本的な関数であるといえるが，以下の例が示すように，収束に関してはきわめて悪い．

定理 11.1. ある $f \in L^1(\mathbb{T})$ が存在して，そのフーリエ級数展開

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny}\, dy \right) e^{inx} \tag{11.1}$$

は $L^1(\mathbb{T})$-収束しない．

証明は問題 46 を参照のこと．

連続関数は高校の数学から登場しているという点から非常に基本的な関数であるといえるが，以下の例が示すように，収束に関してはきわめて悪い．

定理 11.2. ある $f \in C(\mathbb{T})$ が存在して，そのフーリエ級数展開

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny}\, dy \right) e^{inx} \tag{11.2}$$

は一様収束しない．

証明は問題 47 を参照のこと．

定理 11.3. 与えられた測度 0 の集合 E に対して，$C(\mathbb{T})$ のフーリエ級数で，E 上いたるところ発散するものが存在する．

証明は問題 50 を参照のこと．

定理 11.4. $L^1(\mathbb{T})$ のフーリエ級数で，いたるところ発散するものが存在する．

証明は問題 51 を参照のこと．

次の定理は証明できないが，$L^2(\mathbb{T})$ ではこれとは対照的なことが起こっている．これは 1 次元に対してのみ当てはまることである．

定理 11.5 (カールソン, 1966)**.** 任意の $f \in L^2(\mathbb{T})$ に対して，そのフーリエ級数展開

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny}\, dy \right) e^{inx} \tag{11.3}$$

はほとんどいたるところ収束している．

第 11 節の問題.

B

問題 46. $f(t) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{int}$ の形をした関数を一般に三角多項式という．

(1) $L^1(\mathbb{T})$ において，三角多項式全体のなす集合が稠密であることを示せ．
(2) $N \le n$ とする．このとき，$S_N(K_n, \cdot) = \sigma_n(D_N, \cdot)$ を示せ．
(3) 作用素ノルム

$$\|S_N\|_{L^1(\mathbb{T}) \to L^1(\mathbb{T})} = \sup\left\{ \|S_n(f, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{T})} \,:\, f \in L^1(\mathbb{T}), \quad \|f\|_{L^1(\mathbb{T})} = 1 \right\} \tag{11.4}$$

を計算せよ．

(4) $f \in L^1(\mathbb{T})$ で，そのフーリエ級数が $L^1(\mathbb{T})$-収束しないものが存在することを示せ．

B

問題 47.

(1) $C(\mathbb{T})$ において，三角多項式全体のなす集合が稠密であることを示せ．
(2) $N = 1, 2, \cdots$ とする．$f \in C(\mathbb{T})$ で，$\|f\|_\infty \le 1$, $\left|\int_0^{2\pi} f(t) D_N(t)\,dt\right| > \frac{1}{2}\|D_N\|_1$ を満たしているものが存在することを示せ．
(3) $f \in C(\mathbb{T})$ で，そのフーリエ級数が原点で発散しているものが存在することを示せ．

B

問題 48. $X = L^1(\mathbb{T})$ もしくは $X = C(\mathbb{T})$ とする．

$$S^*(f,t) = \sup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} |S_n(f,t)|, \quad S_n(f,t) = \sup_{m \le n} |S_m(f,t)| \tag{11.5}$$

とおく．

(1) $\mathbb{T}$ の部分集合 E に関して次の (i), (ii), (iii) は同値であることを示せ．
 (i) E のすべての点でフーリエ級数が発散する $f \in X$ が存在する．
 (ii) $g \in X$ が存在して，$\sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n(g,t)| = \infty$ が E のすべての点 t で成立する．
 (iii) ある三角多項式の列 $\{P_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ が存在して，$\sum_{j=1}^{\infty} \|P_j\|_X < \infty$ とすべての $t \in E$ に対して，$\sup_{j \in \mathbb{N}} S^*(P_j, t) = \infty$ が成り立つ．
(2) $\mathbb{T}$ の部分集合列 $\{E_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ で，各 $j \in \mathbb{N}$ に対して，E_j のすべての点でフーリエ級数が発散するような $f_j \in X$ が存在するとする．このとき，$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ の各点でフーリエ級数が発散するような $f \in X$ が存在することを示せ．

A

問題 49. $t_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ とする．$\Delta(1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 上の関数 $\psi(t) = \frac{1}{1 + \varepsilon - z e^{-it_0}}$ につき，次の性質を確かめよ．

(1) $\mathrm{Re}(\psi(z)) > 0$, $|z| \le 1$.
(2) $|\psi(e^{i\theta})| \ge \frac{1}{3\varepsilon}$, $t_0 - \varepsilon < \theta < t_0 + \varepsilon$.

B

問題 50. E を有限個の区間の合併として表される測度 δ の集合とする．このとき，ある三角多項式 φ が存在して，

$$S^*(\varphi, t) > \frac{1}{2\pi} \log\left(\frac{1}{3\delta}\right), \ \|\varphi\|_\infty \le 1 \tag{11.6}$$

が成立することを示せ．また，このことを用いて与えられた測度 0 の集合 $F \subset \mathbb{T}$ に対して，F 上でいたるところ発散している連続関数のフーリエ級数が存在していることを示せ．

B

問題 51.

(1) $x_1, x_2, \cdots, x_N, \pi$ が $\mathbb{Q}$ 上一次独立で，$|x_j - 2\pi j/N| < N^{-2}$ を満たすと仮定する．このとき，ほとんどいたるところの $t \in \mathbb{T}$ に対して，$\displaystyle\sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} D_n(t - x_j) \right| > \log N$ である．

(2) $L^1(\mathbb{T})$ のフーリエ級数で，いたるところ発散するようなものが存在する．

12. 偏微分方程式への応用

フーリエ解析は波動方程式や熱方程式へと応用される．

$\kappa > 0$ を正定数とする．波動方程式は

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) \tag{12.1}$$

で与えられる．また，熱方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) \tag{12.2}$$

で与えられる．どちらの場合も κ は媒質などによって決まる定数である．

ここでは，特に熱方程式を扱うことにしよう．以下のような実験を考える．

> 赤レンガの底面を周期的に加熱・冷却し，底面からの距離の異なる 3 点 x の温度変化 $u(x,t)$ を測定する．

底面の温度変化を

$$\theta(t) = \begin{cases} 2T & (0 \le t < \pi) \\ 0 & (\pi \le t < 2\pi) \end{cases} \tag{12.3}$$

を満たしている 2π-周期の関数としてモデル化する．

$\theta(t) - T$ は奇関数であるので，

$$\theta(t) - T = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \sin(jt) \tag{12.4}$$

とフーリエ級数展開できる．ここで，係数は

$$\pi a_j = 2\int_0^{\pi} T \sin(jt)\,dt = \frac{2T}{j}(1-(-1)^j) \tag{12.5}$$

である．したがって，

$$\theta(t) = T + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2T}{\pi j}(1-(-1)^j)\sin(jt) \tag{12.6}$$

と表されることがわかった．

ここで，熱方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) \tag{12.7}$$

の解として，

$$u_j(x,t) = e^{-\kappa j^2 t}\sin(jt) \tag{12.8}$$

が取れる．したがって，

$$\theta(t) = T + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2T}{\pi j}(1-(-1)^j)e^{-\kappa j^2 t}\sin(jt) \tag{12.9}$$

と表される解は熱方程式の解であるといえる．このように，熱方程式を解くのにフーリエ級数は有効である．

第 12 節の問題.

B

問題 52. フーリエ級数を用いて，熱方程式 $\dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)$ を初期条件，境界条件 $u(0,x) = x(\pi - x)$, $0 \le x \le \pi$, $u(t,0) = u(t,\pi) = 0$, $t \ge 0$ の下で解け.

問題 53. $f(x) = |x|$, $(-\pi \le x \le \pi)$ となるように 2π-周期関数 f を定める．フーリエ級数を用いて，波動方程式 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)$ を初期条件，境界条件 $u(0,x) = f(x)$ の下で解け.

Part 2. 演習問題の解答，解説

13. 標準解答

13.1. 第 1 節の解答.

問題 1.

(1) (1),(2) は対偶命題を示していることに注意されたい.
 (a) 【対偶命題『G が絶対値が 1 ではない複素数 z を含んでいるならば，G はコンパクトではない』を示す.】$|z|>1$ なら

$$\{z, z^2, \cdots, z^n, \cdots\}(\subset G) \tag{13.1}$$

は非有界集合であるし，$|z|<1$ なら

$$\{z^{-1}, z^{-2}, \cdots, z^{-n}, \cdots\}(\subset G) \tag{13.2}$$

は非有界集合であるから，どちらにせよ，G は非有界集合である．これより，特に G がコンパクトではない.
 (b) $\delta>0$ を次で定義する.

$$\delta = \inf\{k>0 : 0<|1-z|<k \text{ となる } z \in G \text{ が存在しない }\}. \tag{13.3}$$

【$\delta>0$ ならば，G は有限集合であることを示す.】$\delta>0$ と仮定すると，$0<|1-z|<\delta$ となる $z\in G$ が存在しない．ここで，z 中心の部分弧

$$\Delta(z;\delta/2) = \left\{ w \in \mathbb{T} : |z-w| < \frac{\min(1,\delta)}{2} \right\} \tag{13.4}$$

と定めると，$\{\Delta(z;\delta/2)\}_{z\in G}$ は互いに交わらない．$z\in G$ によらず $\Delta(z;\delta/2)$ は長さ一定値の円弧であるから，$\sharp G<\infty$ となる.
したがって，(b) の状況では $\delta=0$ となるわけだが，これは G の稠密性を示している.
 (c) G を S^1 に含まれるコンパクト群とする．G が有限群であるか無限群であるかで場合わけをする.
  (i) 【$\sharp G<\infty$ のとき】ここでは，偏角は $[0,2\pi)$ に値をとると考えることにする．$1\in G$ とは異なる最も距離の近い $z_0\in G$ をとる．必要なら ${z_0}^{-1}$ を考えて，偏角は半開区間 $(0,\pi]$ に存在するとしてよい．ここで，$\varphi:\mathbb{Z}\to G$ を $\varphi(n)={z_0}^n$ と定める．G が有限群であるから，$\mathrm{Ker}(\varphi)=N\mathbb{Z}$ となる N が存在する．仮に $\varphi(\mathbb{Z})=G$ でないと仮定すると，偏角を見ることで，$k\in\mathbb{Z}$ が存在して ${z_0}^{k-1}$ と ${z_0}^k$ の間に $w\in G$ が存在することになる．${z_0}^k w^{-1}\in G$ と $w{z_0}^{1-k}\in G$ の偏角はどちらも z_0 のそれより小さくなるので，z_0 のとり方に反する．ゆえに，$G=\varphi(\mathbb{Z})$ となることがわかる．よって，(群の) 準同型定理より，

$$G = \{1, z_0, {z_0}^2, \cdots, {z_0}^{N-1}\} \sim \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \tag{13.5}$$

となる.
  (ii) 【$\sharp G=\infty$ のとき】G は S^1 で稠密だから，コンパクト性より，$G=\overline{G}=S^1$ となる.
 (d) (c) で E が有限 (群) になる条件を与えていて，それには該当しないことがわかった．したがって，(b) から確かに E は稠密である.

(2) (a) 対偶命題を示す．仮に G の測度が正であるとして，$G=S^1$ を示そう．$f=\chi_G$ として，$f*f$ は連続関数である．このことから導かれる結論は単位元の近傍 U が存在して，任意の U の元は $g_1,g_2\in G$ を用いて，$g_1{g_2}^{-1}$ と表されることである．これは G の群構造から，$U\subset G$ を導く．したがって，U が無限集合であるから，(b) から G は稠密群であることになる．G は U を含んでいるから，$G=S^1$ となる.

(b) 仮に，$|\varphi(z)| > 1$ となる $z \in \mathbb{C}$ が存在したとする．すると，

$$E_j = \left\{ w \in S^1 : |\varphi(z)|^j \le |\varphi(w)| < |\varphi(z)|^{j+1} \right\}, \quad (j \in \mathbb{Z}) \tag{13.6}$$

とおくことで，S^1 の分割

$$S^1 = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \tag{13.7}$$

が得られる．$w \in E_j \iff wz \in E_{j+1}$ である．各 E_j が可測であるから，体積に関して

$$2\pi = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |E_j| = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |E_0| \tag{13.8}$$

となる．$|E_0| = 0$ であっても，$|E_0| > 0$ であってもこの等式は成立しない．よって，$|\varphi(z)| > 1$ となる $z \in \mathbb{C}$ が存在しない．
$|\varphi(z)| < 1$ となる $z \in \mathbb{C}$ も同様な理由で存在しない．

(c) φ を 2π-周期の有界な $\mathbb{C}$-値関数とみなせる．ゆえに，少なくとも $L^2(\mathbb{T})$ の位相で，

$$\varphi(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \exp(ijx) \tag{13.9}$$

と展開される．$\varphi \equiv 0$ ではない以上，a_j はどれか一つは消えていない．

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \exp(ijy)\exp(ijx) = \varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \varphi(y) \exp(ijx) \tag{13.10}$$

であるから，$a_j \varphi(y) = a_j \exp(ijy)$ がすべての j に対して成立することになる．このことから，$a_j \ne 0$ ならば，$\varphi(y) \equiv \exp(ijy)$ なので，$\varphi(y) = \exp(ijy)$ となるような j が唯一存在する．したがって，$\varphi(x) = \exp(ijx)$ と $j \in \mathbb{Z}$ を用いて表される．

□

問題 2. $\mathbb{T}^d$ に自然な方法で距離を入れて距離空間にする．この用語 (距離空間) がわからなくても，以下の解答は自然と理解できるであろう．

(1) 仮に稠密ではないと仮定すると，$\delta > 0$ とある点 $\rho \in \mathbb{T}^d$ が存在して，$B(\rho, \delta)$ と無限集合 Λ は交わらないことになる．$\{B(\rho + x, \delta/2)\}_{\lambda \in \Lambda}$ は互いに素な (交わらない) 無限集合であるからこれは矛盾である．

(2) (1) より，

$$\left| \frac{n\lambda_j}{2\pi} - \frac{\alpha_j}{2\pi} - n_j \right| < \frac{\varepsilon}{2\pi} \tag{13.11}$$

となる $n, n_1, n_2, \cdots, n_d \in \mathbb{Z}$ が存在する．この関係式より，

$$|e^{in\lambda_j} - e^{i\alpha_j}| < \varepsilon, \quad (j = 1, 2, \cdots, d) \tag{13.12}$$

が成り立つ．

□

13.2. **第 2 節の解答.**

問題 3. 半角の公式を用いる．リーマン・ルベーグの定理を用いることもできるが，これは直接計算することができるであろう． □

問題 4. 次の二つの解法 (a),(b) があるが，(b) を特に解説する．

(a) 積分の変数変換公式を用いる．
(b) 微積分学の基本定理を用いる．

関数 $F:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ を

$$F(a)=\int_a^{a+2\pi} f(x)\,dx \tag{13.13}$$

で与える．ルベーグ積分を履修していないものは (i) を，ルベーグ積分既修者は (i),(ii) を読んで理解すること．

(i) F が連続と仮定すると，微積分学の基本定理によって，$F'(a)=f(a+2\pi)-f(a)$ が成り立つ．したがって，周期性から $F'(a)=0$ となる．これは，$F(a)=F(0)$ を意味している．$F(a)=F(0)$ を書き下すと，結論の式になる．
(ii) F がルベーグ可積分と仮定すると，ルベーグの定理によって，ほとんどいたるところ $F'(a)=f(a+2\pi)-f(a)$ が成り立つ．したがって，周期性からほとんどいたるところ $F'(a)=0$ となる．これは，等式がほとんどいたるところしか成り立たないが，F の絶対連続性より $F(a)=F(0)$ を意味している．$F(a)=F(0)$ を書き下すと，結論の式になる．

□

問題 5. 2 項展開すると

$$\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}|f(x)-p_N(x)|^2\,dx=\sum_{k=-N}^{N}|\alpha_k|^2-\sum_{k=-N}^{N}(\overline{\alpha_k}c_k+\alpha_k\overline{c_k})+\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}|f(x)|^2\,dx \tag{13.14}$$

であるから，さらに平方完成して，

$$\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}|f(x)-p_N(x)|^2\,dx\sum_{k=-N}^{N}|\alpha_k-c_k|^2+\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}|f(x)|^2\,dx-\sum_{k=-N}^{N}|c_k|^2 \tag{13.15}$$

となる．この式より $\alpha_k=c_k$ で最小値をとる． □

問題 6. 次のように計算していく．

$$\left|\|D_n\|_{L^1(\mathbb{T})}-\int_0^\pi\left|\frac{\sin\left(\dfrac{2n+1}{2}t\right)}{\left(\dfrac{t}{2}\right)}\right|dt\right|\le\int_0^\pi\left|\frac{\sin\left(\dfrac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)}-\frac{\sin\left(\dfrac{2n+1}{2}t\right)}{\left(\dfrac{t}{2}\right)}\right|dt.$$

ここで，定数 $C>0$ が存在して，

$$\left|\frac{1}{\sin t}-\frac{1}{t}\right|\le C\quad\left(0\le t\le\frac{\pi}{2}\right) \tag{13.16}$$

だから，

$$\int_0^{\pi}\left|\frac{\sin\left(\dfrac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)}-\frac{\sin\left(\dfrac{2n+1}{2}t\right)}{\left(\dfrac{t}{2}\right)}\right|dt\le C\int_0^{\pi}dx=C\pi \tag{13.17}$$

となる．したがって，左辺の積分に変数変換をして，

$$\left|\|D_n\|_{L^1(\mathbb{T})}-2\int_0^{(2n+1)\pi/2}\left|\frac{\sin t}{t}\right|dt\right| \tag{13.18}$$

となる．ここで，

(13.19)
$$\left|\int_{(2n-1)\pi/2}^{(2n+1)\pi/2}\left|\frac{\sin t}{t}\right|dt-\int_{(2n-1)\pi/2}^{(2n+1)\pi/2}\left|\frac{2\sin t}{(2n-1)\pi}\right|dt\right|\le C'\int_{(2n-1)\pi/2}^{(2n+1)\pi/2}\frac{4\,dt}{(2n-1)^2}=\frac{2\pi C'}{(2n-1)^2}$$

であるから，適当な定数を用いて

$$\left|\|D_n\|_{L^1(\mathbb{T})}-2\sum_{k=1}^{n}\int_{(2k-1)\pi/2}^{(2k+1)\pi/2}\left|\frac{\sin t}{(2k-1)\pi/2}\right|dt\right|\le C'' \tag{13.20}$$

となる．したがって，

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{(2k-1)\pi/2}^{(2k+1)\pi/2}\left|\frac{\sin t}{(2k-1)\pi/2}\right|dt=\frac{2}{\pi}\log n+O(1) \tag{13.21}$$

だから，確かに問題の数列は有界数列である． □

問題 7. 定義によって，

$$\lim_{R\to\infty}\int_{R^{-1}}^{R}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2} \tag{13.22}$$

を証明することになる．

$$\int_0^{\infty}e^{-tx}\,dx=\lim_{S\to\infty}\int_0^{S}e^{-xt}\,dt=\frac{1}{x} \tag{13.23}$$

より，

$$\int_{R^{-1}}^{R}\frac{\sin x}{x}\,dx=\int_{R^{-1}}^{R}\lim_{S\to\infty}\left(\int_0^{S}e^{-xt}\,dt\right)\sin x\,dx=\lim_{S\to\infty}\int_{R^{-1}}^{R}\left(\int_0^{S}e^{-xt}\sin x\,dt\right)dx$$

となる．ここで，積分順序を入れ替えると

$$\begin{aligned}\int_{R^{-1}}^{R}\left(\int_0^{S}e^{-xt}\sin x\,dt\right)dx&=\int_0^{S}\left(\int_{R^{-1}}^{R}e^{-xt}\sin x\,dx\right)dt\\&=\int_0^{S}\left[-\frac{t}{t^2+1}e^{-xt}\sin x-\frac{1}{t^2+1}e^{-xt}\cos x\right]_0^R dt\\&=\int_0^{S}\left(\frac{1}{t^2+1}-\frac{1}{t^2+1}e^{-tR}\cos R-\frac{t}{t^2+1}e^{-tR}\sin R\right)dt\end{aligned}$$

となる．R を含む項だけを取り出して考えて見ると積分の三角不等式

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\le\int_a^b|f(x)|\,dx,\ a<b \tag{13.24}$$

と合成公式

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta) \tag{13.25}$$

によって

$$\left|\int_0^S \left(\frac{e^{-tR}\cos R}{t^2+1} - \frac{te^{-tR}\sin R}{t^2+1}\right)dt\right| \le \int_0^S \frac{|\cos R + t\sin R|}{t^2+1}e^{-tR}\,dt \le \int_0^S \frac{e^{-tR}\,dt}{\sqrt{t^2+1}}$$

だが，分母を小さくして考えると，

$$\left|\int_0^S \left(\frac{1}{t^2+1}e^{-tR}\cos R - \frac{t}{t^2+1}e^{-tR}\sin R\right)dt\right| \le \int_0^S e^{-tR}\,dt = \left[e^{-tR}\right]_0^S = \frac{1}{R}(1-e^{SR}) \le \frac{1}{R}$$

なので，

$$\lim_{R\to\infty}\int_{R^{-1}}^R \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{S\to\infty}\int_0^S \frac{1}{t^2+1}\,dt \tag{13.26}$$

が得られる．$t=\tan\theta$ と変数変換して，

$$\lim_{S\to\infty}\int_0^S \frac{1}{t^2+1}\,dt = \lim_{\theta'\uparrow\pi/2}\int_0^{\tan\theta'} \frac{1}{t^2+1}\,dt = \lim_{\theta'\uparrow\pi/2}\int_0^{\theta'} d\theta = \frac{\pi}{2} \tag{13.27}$$

となる．以上で，

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} \tag{13.28}$$

が証明された． □

問題 8. 以下，3 つの場合に分ける．

(1) ある $M\in\mathbb{N}$ が存在して，$a_M \le j-1 < j+1 \le a_{M+1}$ となる場合．この場合，

$$\begin{aligned} b_k &= \left(1+\sum_{m=1}^\infty \left\{1-\left(1-\frac{k}{a_m}\right)_+\right\}\right)^{-1} \\ &= \left(1+\sum_{m=1}^M \left\{1-\left(1-\frac{k}{a_m}\right)_+\right\} + \sum_{m=M+1}^\infty \left\{1-\left(1-\frac{k}{a_m}\right)_+\right\}\right)^{-1} \\ &= \left(1+M+\sum_{m=M+1}^\infty \frac{k}{a_m}\right)^{-1} \quad (k=j-1,j,j+1) \end{aligned}$$

であるから，$f(x) = \left(1+M+\sum_{m=M+1}^\infty \frac{x}{a_m}\right)^{-1} \quad (x>0)$ の凸性によって，不等式 $b_{j+1}+b_{j-1} \ge 2b_j$ は明らかである．

(2) ある $M\in\mathbb{N}$ が存在して，$j-1 < a_M = j < j+1 \le a_{M+1}$ となる場合．

$$b_k = \left(1+M+\sum_{m=M+1}^\infty \frac{k}{a_m}\right)^{-1} \quad (k=j,j+1) \tag{13.29}$$

かつ

$$b_{j-1} = \left(1+M-1+\frac{j-1}{a_M}+\sum_{m=M+1}^\infty \frac{j-1}{a_m}\right)^{-1} > \left(1+M+\sum_{m=M+1}^\infty \frac{j-1}{a_m}\right)^{-1} \tag{13.30}$$

である．よって，(a) と同じ理由で不等式が得られる．

(3) ある $M \in \mathbb{N}$ が存在して，$a_M < j-1 < j = a_{M+1} < j+1$ となる場合．

$$b_k = \left(1 + M + \sum_{m=M+1}^{\infty} \frac{k}{a_m}\right)^{-1} \quad (k = j-1, j) \tag{13.31}$$

かつ

$$b_{j+1} = \left(1 + M + 1 + \sum_{m=M+2}^{\infty} \frac{j+1}{a_m}\right)^{-1} > \left(1 + M + \sum_{m=M+1}^{\infty} \frac{j+1}{a_m}\right)^{-1} \tag{13.32}$$

である．よって，(a) と同じ理由で不等式が得られる．

以上で，不等式 $b_{j+1} + b_{j-1} \geq 2b_j$ が証明された． □

13.3. 第 3 節の解答.

問題 9.

(1) $\mathrm{Arc}\sin x$ のテーラー展開を見ればあきらか．テーラー展開に関する詳細は省くが，確かめ方の一例として f_N の両辺を微分する方法があることだけ言及しておく．

　収束の一様性に関しては，$\mathrm{Arc}\sin x$ の連続性と f_N が N に関して単調増大であることから Dini の定理が使えて，収束の一様性がわかる．

(2) よく知られているように，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\,dx = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \cdots \cdot \frac{2}{3} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

である．従って，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_N(\sin x)\,dx = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(2n+1)^2} \tag{13.33}$$

となる．

(3) (1),(2) より，

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx = \frac{\pi^2}{8} \tag{13.34}$$

となる．$S : T = 3 : 4$ より，$T = \dfrac{\pi^2}{6}$ である．

□

問題 10.

(1) x^{-x} に収束していることがテーラー展開からわかる．収束の一様性は Dini の定理を適用できる．

(2) $\displaystyle\int_0^1 (-x)^n (\log x)^n\,dx = \int_0^\infty e^{-nt-t} t^n\,dt = \frac{n!}{(n+1)^{n+1}}$ であるから，(1) の両辺を積分すればよい．

□

問題 11.

(1) $x = 0$ のとき，両辺は 0 で等しい．両辺を微分すれば，テーラー展開の公式が得られるので，確かに問題の等号が成立している．

(2) $\dfrac{1}{1-y} = e^z$ なる変数変換をする．$y = 1 - e^{-z}$ であるから，

$$\int_0^1 \frac{1}{y}\left(\log \frac{1}{1-y}\right) dy = \int_0^\infty \frac{z\,dz}{e^z - 1} \tag{13.35}$$

となる．ここで，$\displaystyle\frac{z}{e^z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z\,e^{-nz} \quad (z > 0)$ より，単調収束定理から，

$$\int_0^\infty \frac{z\,dz}{e^z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\infty z\,e^{-nz}\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^2}{6} \tag{13.36}$$

が得られる．

□

問題 12. 最初の等式の最初の等号は $x = \sin\varphi$ なる変換を施す．最初の等式の二番目の等号は

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi\, d\varphi}{\tan\varphi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi \frac{d}{d\varphi} \log(\sin\varphi)\, d\varphi = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin\varphi)\, d\varphi \tag{13.37}$$

であることを用いる．最後の積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin\varphi)\, d\varphi$ は確かに $-\dfrac{\pi}{2}\log 2$ である． □

問題 13.

(1) $x = 1$ のときは，$0 \le x < 1$ のときの結果とアーベル変形を用いて極限移行できる．以後，$0 \le x < 1$ とする．たとえば，u に関する一様収束性などを用いて

$$\int_0^{x^{-1/a}} \frac{u^{b-1}}{1+u^a}\, du = \int_0^{x^{-1/a}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u^{b+an-1}\, du = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{x^{-1/a}} u^{b+an-1}\, du \tag{13.38}$$

と右辺を変形すればわかるように，右辺と左辺は等しい．

(2) 【S_1 の計算】(1) より，

$$S_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+u^3}\, du$$

であるが，

$$\int \frac{du}{1+u^3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \mathrm{Arc}\tan\left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{3}\log(1+u) - \frac{1}{6}\log(u^2-u+1) + C \tag{13.39}$$

より，$S_1 = \dfrac{1}{9}\left(\sqrt{3}\pi + 3\log 2\right)$ である．

【S_2 の計算】(1) と

$$S_1 + S_2 = \int_0^1 \frac{1}{1-u+u^2}\, du = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^1 \mathrm{Arc}\tan\left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right) du = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9} \tag{13.40}$$

より，$S_2 = \dfrac{1}{9}\left(\sqrt{3}\pi - 3\log 2\right)$ である．

□

問題 14. $\dfrac{1}{e^x - 1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} \quad (x > 0)$ より，

$$\begin{aligned}\int_{R^{-1}}^{R} \frac{\sin(xy)}{e^x - 1}\, dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{R^{-1}}^{R} e^{-nx} \sin(xy)\, dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-n)e^{-nx}\sin(xy)}{n^2+y^2} + \frac{(-y)e^{-nx}\cos(xy)}{n^2+y^2}\right]_{R^{-1}}^{R}\end{aligned}$$

ここで，

$$ne^{-nR} \le ne^{-n}e^{-(R-1)},\ ne^{-nR^{-1}} \le e^{-1} \tag{13.41}$$

などを用いてルベーグの積分定理を用いると，

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(xy)}{e^x - 1}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-n)e^{-nx}\sin(xy)}{n^2+y^2} + \frac{(-y)e^{-nx}\cos(xy)}{n^2+y^2}\right]_0^{\infty} \tag{13.42}$$

となる． □

13.4. 第 4 節の解答.

問題 15. f は奇関数であるから

$$f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_k \sin(kx) + \cdots \tag{13.43}$$

と展開できる．したがって,

$$\frac{\pi}{2} a_k = \int_0^\pi f(x)\sin(kx)\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin(kx)\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(kx)\,dx \tag{13.44}$$

となる．$k \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\int x\sin(kx)\,dx = \frac{1}{k}\int x(-\cos(kx))'\,dx = -\frac{x\cos(kx)}{k} + \frac{\sin(kx)}{k^2} + C \tag{13.45}$$

であるから,

$$\frac{\pi}{2} a_k = -\frac{\pi}{2k}\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \frac{1}{k^2}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \text{つまり } a_k = -\frac{1}{k}\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \frac{2}{\pi k^2}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \tag{13.46}$$

となる．以上より,

$$\frac{\pi}{2} - \left|x - \frac{\pi}{2}\right| = \sum_{k=1}^\infty \left(-\frac{1}{k}\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \frac{2}{\pi k^2}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right)\sin(kx),\ 0 \le x \le \pi \tag{13.47}$$

が得られる． □

問題 16. 定義に従って計算していくと，$k \neq 0$ のとき,

$$c_k(f) = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)e^{-ik\omega x}\,dx = -\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{0} e^{-ik\omega x}\,dx + \frac{1}{2\ell}\int_0^{\ell} e^{-ik\omega x}\,dx$$

となる．

$$c_k(f) = -\frac{1}{2\ell}\left[\frac{1}{-ik\omega}e^{-ik\omega x}\right]_{-\ell}^{0} + \frac{1}{2\ell}\left[\frac{1}{-ik\omega}e^{-ik\omega x}\right]_0^{\ell} = \frac{1}{2ik\pi}\left\{(1 - e^{ik\omega\ell}) + (1 - e^{-ik\omega\ell})\right\}.$$

ここで，オイラーの公式と ω の定義式を代入すると,

$$c_k(f) = \frac{1}{ik\pi}(1 - \cos(k\omega\ell)) = \begin{cases} \dfrac{2}{ik\pi} & (k \text{ は奇数のとき}) \\ 0 & (k \text{ は偶数のとき}) \end{cases}$$

となる．$k = 0$ の場合でも同じことが通用する．したがって,

(13.48)
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2}{i(2k-1)\pi}e^{i(2k-1)\omega x} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi}\sin((2k-1)\omega x) = \begin{cases} -1 & (-\ell \le x < 0 \text{ のとき}) \\ 1 & (0 \le x < \ell \text{のとき}) \end{cases}$$

が得られる． □

問題 17. 偶関数であるから,

$$c_k(f) = \frac{1}{\ell}\int_0^{\ell} (\ell - x)\cos(k\omega x)\,dx$$

となる．この積分を計算する．$k = 0$ のときは,

$$c_k(f) = c_0(f) = \frac{\ell}{2} \tag{13.49}$$

であるから，この場合はしばらく考察からはずす．$k \neq 0$ のときは定義によって

$$c_k(f) = \frac{1}{\ell}\int_0^{\ell} (\ell - x)\cos(k\omega x)\,dx$$

となる．ここで，部分積分をすると，

$$c_k(f) = \frac{1}{k\pi}\int_0^\ell (\ell - x)(\sin(k\omega x))'\,dx = \frac{1}{k\pi}\int_0^\ell \sin(k\omega x)\,dx = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi\omega k^2} & (k\text{ は奇数のとき}) \\ 0 & (k\text{ は偶数のとき}) \end{cases}$$

となる．したがって，

$$\begin{aligned}\frac{\ell}{2} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi\omega(2k-1)^2} e^{i(2k-1)\omega x} &= \frac{\ell}{2} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{4\cos((2k-1)\omega x)}{\pi\omega(2k-1)^2} \\ &= \begin{cases} x + \ell & (-\ell \le x < 0\text{ のとき}) \\ -x + \ell & (0 \le x < \ell\text{のとき}) \end{cases}\end{aligned}$$

となる． □

問題 18. f が奇関数であるから，定義によって，$c_k(f)$ は

$$c_k(f) = \frac{-i}{\ell}\int_0^\ell \frac{A}{\ell} x \sin(k\omega x)\,dx \tag{13.50}$$

となる．したがって，$k = 0$ のときは $c_k(f) = 0$ となる．以下，$k \neq 0$ とする．

$$c_k(f) = \frac{-i}{k\pi}\int_0^\ell \frac{A}{\ell} x(-\cos(k\omega x))'\,dx$$

と変形して部分積分を実行して，

$$c_k(f) = \frac{i}{k\pi}\left[\frac{A}{\ell} x \cos(k\omega x)\right]_0^\ell - \frac{i}{k\pi}\int_0^\ell \frac{A}{\ell}\cos(k\omega x)\,dx = \frac{i}{k\pi}\left[\frac{A}{\ell} x \cos(k\omega x)\right]_0^\ell = \frac{Ai(-1)^k}{k\pi}$$

となる．したがって，

$$\sum_{k\neq 0} \frac{Ai(-1)^k}{k\pi} e^{ik\omega x} = \frac{2A}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(k\omega x) = \frac{A}{\ell}x, \quad -\ell < x < \ell \tag{13.51}$$

となる． □

13.5. 第 5 節の解答.

問題 19. $f(x)$ を以下のように正弦関数展開する.

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx), \quad (-\pi \le x < \pi). \tag{13.52}$$

すると，係数は $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx)\,dx$ で与えられる．部分積分を実行して係数を求める.

$$a_n = \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} x(-\cos(nx))'\,dx = \frac{1}{\pi n}\left[-x\cos(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\,dx = \frac{2(-1)^n}{n}.$$

したがって,

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n}\sin(nx) \tag{13.53}$$

となるが，これの収束判定をする．$n \in \mathbb{Z}$ を用いて $x = n\pi$ と表される場合は右辺は各項が 0 なので，収束は問題がない．どんな $n \in \mathbb{Z}$ に対しても $x = n\pi$ とならないとすると,

$$\left\{\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \sin(kx)\right\}_{n=1}^{\infty} \tag{13.54}$$

で与えられる数列は有界である．従って，アーベル判定法を用いて収束が確認される. □

問題 20. はじめに，$\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ と $\{B_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ の特定をする．すべての k に対して，三角不等式から

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx - \int_{-\pi}^{\pi} T_N(x)\sin(kx)\,dx\right| \le \int_{-\pi}^{\pi}|f(x) - T_N(x)|\,dx \tag{13.55}$$

であるから,

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} T_N(x)\sin(kx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx \tag{13.56}$$

である．ここで，N によらずに

$$\int_{-\pi}^{\pi} T_N(x)\sin(kx)\,dx = B_k\pi, \quad (1 \le k \le N) \tag{13.57}$$

であるから,

$$B_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx \tag{13.58}$$

となる．上述の議論は sin を cos に変えても成立し，結論として

$$A_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx, \quad (k \ge 1), \quad A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \tag{13.59}$$

が得られる.

(1) リーマン・ルベーグの定理によって $A_k \to 0$, $B_k \to 0$ であるからこれは明らかである.

(2) A_k, B_k を具体的に書き下すことで，

$$\begin{aligned}T_N(x) &= A_0 + \sum_{k=1}^{N} A_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{N} B_k \sin(kx)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\,dy + \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\left(\cos(kx)\cos(kx)+\sin(kx)\sin(ky)\right)\,dy\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\,dy + \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\cos(k(x-y))\,dy.\end{aligned}$$

ここで，

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N}\cos(k\theta) = \frac{\sin\left(\dfrac{2N+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\dfrac{1}{2}\theta\right)} \tag{13.60}$$

であるから，

$$T_N(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\frac{\sin\left(\dfrac{2N+1}{2}(x-y)\right)}{\sin\left(\dfrac{1}{2}(x-y)\right)}\,dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\frac{\sin\left(\dfrac{2N+1}{2}y\right)}{\sin\left(\dfrac{1}{2}y\right)}\,dy. \tag{13.61}$$

$y \to -y$ なる変換を施せば，

$$T_N(x) = \int_0^{\pi} (f(x-y)+f(x+y))\frac{\sin\left(\dfrac{2N+1}{2}y\right)}{\pi\sin\left(\dfrac{1}{2}y\right)}\,dy \tag{13.62}$$

が得られる．よって，

$$D_N(t) = \frac{\sin\left(\dfrac{2N+1}{2}y\right)}{\pi\sin\left(\dfrac{1}{2}y\right)} \tag{13.63}$$

とおけばよいことになりそうである．実際，

$$D_N(t) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\cos(kt) \tag{13.64}$$

だから，$\displaystyle\int_0^{\pi} D_N(t)\,dt = \frac{1}{2}$ となり，確かに (2) にある関係式が得られる．

(3) $\displaystyle (f(x-t)+f(x+t)-2f(x))D_N(t) = (f(x-t)+f(x+t)-2f(x))\frac{1}{t}\sin\left(\frac{2N+1}{2}t\right)$ であるから，リーマン・ルベーグの定理が使える状況にある．

□

問題 21.

(1) f は偶関数であるから，

$$f(x) = a_0 + a_1\cos x + a_2\cos 2x + \cdots + a_n\cos(nx) + \cdots \tag{13.65}$$

なる展開ができる．このとき，a_0 は

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - |x|)\,dx = \frac{\pi}{2} \tag{13.66}$$

で与えられる．また，$a_n,\, n \in \mathbb{N}$ は

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - |x|)\cos(nx)\,dx$$

で与えられる．cos は偶関数であるから，

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\pi - |x|)\cos(nx)\,dx = -\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos(nx)\,dx, \quad n \in \mathbb{N}$$

となる．したがって，

$$a_n = \frac{2}{n\pi}\int_{0}^{\pi} x(\sin(nx))'\,dx = -\frac{2}{n\pi}\int_{0}^{\pi}\sin(nx)\,dx = \begin{cases} -\dfrac{4}{n^2\pi} & n(\text{は奇数のとき}) \\ 0 & n(\text{は偶数のとき}) \end{cases}$$

となる．したがって，

$$\pi - |x| = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2n-1)^2}\cos(2n-1)x,\; x \in [-\pi, \pi] \tag{13.67}$$

となる．$\pi - |x|$ はリプシッツ連続であるからこれは収束している．

(2) 次の二つの関数の展開を考えて足すとよい．

$$\frac{\exp(ax) + \exp(-ax)}{2} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx)$$
$$\frac{\exp(ax) - \exp(-ax)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(nx)$$

まず，a_0 は

$$a_0 = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\exp(ax) + \exp(-ax)}{4\pi}\,dx = \frac{1}{4\pi a}\left[\exp(ax) - \exp(-ax)\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\exp(\pi a) - \exp(-\pi a)}{2\pi a} \tag{13.68}$$

で与えられる．さらに，$a_n,\, n \in \mathbb{N}$ は

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\exp(ax) + \exp(-ax))\cos(nx)\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp(ax)\cos(nx)\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{a\exp(ax)\cos(nx) + n\exp(ax)\sin(nx)}{a^2 + n^2}\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{a\exp(\pi a)(-1)^n - a\exp(-\pi a)(-1)^n}{\pi(a^2 + n^2)}. \end{aligned}$$

同様にして，$b_n,\, n \in \mathbb{N}$ は

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\exp(ax) - \exp(-ax))\sin(nx)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \exp(ax)\sin(nx)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{a\exp(ax)\sin(nx) - n\exp(ax)\cos(nx)}{a^2+n^2}\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{n\exp(\pi a)(-1)^{n+1} + n\exp(-\pi a)(-1)^n}{\pi(a^2+n^2)}.
\end{aligned}
$$

となる．したがって，

$$
\begin{aligned}
e^{ax} &= \frac{\exp(\pi a) - \exp(-\pi a)}{2\pi a} \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{a\exp(\pi a) - a\exp(-\pi a)}{\pi(a^2+n^2)}\cos(nx) + \frac{-n\exp(\pi a) + n\exp(-\pi a)}{\pi(a^2+n^2)}\sin(nx)\right)
\end{aligned}
$$

となる．ワイエルストラスの判定法で $(-\pi, \pi)$ では収束しているとわかるが，$x = \pi$ とすると，

$$
\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{a\exp(\pi a) - a\exp(-\pi a)}{\pi(a^2+n^2)}\cos(nx) + \frac{-n\exp(\pi a) + n\exp(-\pi a)}{\pi(a^2+n^2)}\sin(nx)\right) \tag{13.69}
$$

が収束するから，結局 $[-\pi, \pi]$ のいたるところ収束しているとわかる． □

問題 22.

(1) これは等比数列の計算をすれば明らかであるから省略.

(2) $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} a_k\, e^{ikx}$ とおく．$m > n$ とすると，

$$
S_n(x) - S_m(x) = \sum_{k=-m}^{-n-1} a_k\, e^{ikx} + \sum_{k=n+1}^{m} a_k\, e^{ikx}
$$

となる．それぞれの和を別々に扱えるので，$k > 0$ の方の和 $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{m} a_k\, e^{ikx}$ の一様収束を示すことにする.

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{m} a_k\, e^{ikx} &= \sum_{k=n+1}^{m}\left(a_k\sum_{j=0}^{k} e^{ijx} - a_k\sum_{j=0}^{k-1} e^{ijx}\right) \\
&= \sum_{k=n+1}^{m} a_k\left(\sum_{j=0}^{k} e^{ijx}\right) - \sum_{k=n+1}^{m} a_k\left(\sum_{j=0}^{k-1} e^{ijx}\right) \\
&= \sum_{k=n+1}^{m} a_k\left(\sum_{j=0}^{k} e^{ijx}\right) - \sum_{k=n}^{m-1} a_{k+1}\left(\sum_{j=0}^{k} e^{ijx}\right)
\end{aligned}
$$

と変形する．e^{ijx} に関して括って，

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=n+1}^{m} a_k\, e^{ikx} \\
&= \sum_{k=n+1}^{m} a_k \left(\sum_{j=0}^{k} e^{ijx}\right) - \sum_{k=n+1}^{m} a_{k+1} \left(\sum_{j=0}^{k} e^{ijx}\right) - a_{n+1} \left(\sum_{j=0}^{n} e^{ijx}\right) + a_{m+1} \left(\sum_{j=0}^{m} e^{ijx}\right) \\
&= \sum_{k=n+1}^{m} (a_k - a_{k+1}) \left(\sum_{j=0}^{k} e^{ijx}\right) - a_{n+1} \left(\sum_{j=0}^{n} e^{ijx}\right) + a_{m+1} \left(\sum_{j=0}^{m} e^{ijx}\right)
\end{aligned}$$

となる．したがって，

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in[\varepsilon,2\pi-\varepsilon]} \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\, e^{ikx}\right| \\
&\le \sup_{x\in[\varepsilon,2\pi-\varepsilon]} \left[\sum_{k=n+1}^{m} |a_k - a_{k+1}| \sup \left|\sum_{j=0}^{k} e^{ijx}\right| + |a_{n+1}| \cdot \left|\sum_{j=0}^{n} e^{ijx}\right| + |a_{m+1}| \cdot \left|\sum_{j=0}^{m} e^{ijx}\right|\right] \\
&\le \sup_{x\in[\varepsilon,2\pi-\varepsilon]} \frac{2}{|1-e^{ix}|} \left(|a_{n+1}| + |a_{m+1}| + \sum_{k=n+1}^{m} |a_k - a_{k+1}|\right) \\
&= \frac{2}{|1-e^{i\varepsilon}|} \left(|a_{n+1}| + |a_{m+1}| + \sum_{k=n+1}^{m} |a_k - a_{k+1}|\right)
\end{aligned}$$

ここで，仮定により

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0,\ \sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j - a_{j+1}| < \infty \tag{13.70}$$

であるから，$\kappa > 0$ を任意に取ると，ある N が存在して，$n > N$ のときに

$$|a_n| < \kappa,\ \sum_{j=N}^{\infty} |a_j - a_{j+1}| < \kappa \tag{13.71}$$

である．したがって，$m, n \ge N$ ならば，

$$\sup_{x\in[\varepsilon,2\pi-\varepsilon]} \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\, e^{ikx}\right| \le \frac{6\kappa}{|1-e^{i\varepsilon}|} \tag{13.72}$$

となる．これはコーシー判定法によって無限級数の一様収束を意味している．

(3) 展開

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\, e^{inx} \tag{13.73}$$

の係数 a_n を求める．

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi - x}{2}\right) e^{-inx}\, dx = (-1)^n \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{y}{2} e^{iny}\, dy \tag{13.74}$$

であるから，$n = 0$ のとき，フーリエ係数は 0 である．$n \ne 0$ としよう．すると，

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{y}{2} e^{iny}\, dy = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{y}{2in} (e^{iny})'\, dy = \left[\frac{y}{2in} e^{iny}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi(-1)^n}{in} \tag{13.75}$$

だから，$a_n = \dfrac{1}{2in}$ となる．これより，(2) の判定が使える．

□

13.6. 第 6 節の解答.

問題 23. $\displaystyle\sum_{j \in \mathbb{Z}} |a_j| < \infty$ を示す．これが示されれば，ワイエルストラスの判定法で一様収束が示される．j についての対称性より

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} |a_j| = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{2^{k-1} \le j < 2^k} |a_j| < \infty \tag{13.76}$$

を示せればよい．$h_k = \dfrac{2\pi}{3 \cdot 2^k}$ とおく．すると，

$$|\exp(ijh_k) - 1| = 2 \sin\left(\frac{jh_k}{2}\right) \ge \frac{2jh_k}{\pi} \tag{13.77}$$

であるから，

$$\sum_{2^{k-1} \le j < 2^k} |a_j| \le \frac{\pi}{2jh_k} \sum_{2^{k-1} \le j < 2^k} |(\exp(ijh_k) - 1)a_j| \tag{13.78}$$

となる．コーシー・シュワルツの不等式によって，

$$\sum_{2^{k-1} \le j < 2^k} |(\exp(ih_k) - 1)a_j| \le 2^{\frac{k-1}{2}} \sqrt{\sum_{2^{k-1} \le j < 2^k} |(\exp(ih_k) - 1)a_j|^2} \tag{13.79}$$

が得られる．変数変換によって

$$\begin{aligned}
(\exp(ijh_k) - 1)a_j &= \frac{\exp(ijh_k) - 1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \exp(-ijx)\, dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \exp(ij(h_k - x))\, dx - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \exp(-ijx)\, dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x - h_k) \exp(-ijx)\, dx - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \exp(-ijx)\, dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x - h_k) - f(x)) \exp(-ijx)\, dx
\end{aligned}$$

となる．したがって，ベッセルの不等式によって

$$\sum_{2^{k-1} \le j < 2^k} |(\exp(ijh_k) - 1)a_j|^2 \le \|f - f(\cdot - h_k)\|_{L^2([-\pi,\pi])}{}^2 \tag{13.80}$$

が得られる．さらに平均値の定理より

$$\sum_{2^{k-1} \le j < 2^k} |(\exp(ijh_k) - 1)a_j|^2 \le M|h_k|^2,\ M \tag{13.81}$$

なる評価が得られる．これを代入すると，

$$\sum_{2^{k-1} \le j < 2^k} |(\exp(ih_k) - 1)a_j| \le M 2^{\frac{k-1}{2}} h_k \tag{13.82}$$

となるので，

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j| = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{2^{j-1} \le k < 2^j} |a_k| \right) \le \sum_{k=1}^{\infty} M 2^{\frac{k-1}{2}} h_k < \infty \tag{13.83}$$

となる．よってフーリエ級数は絶対一様収束する． □

問題 24. g を三角多項式 P で $L^1(\mathbb{T})$-近似できるので，g は三角多項式と仮定して構わない．この場合は積分が具体的に計算できるので，一様収束は明らかである． □

問題 25.

(1) テーラー展開によって，$\exp(-t^2) \leq \dfrac{2}{2+2t^2+t^4}$ であるから，コーシー判定法が使える．
(2) 周期が 2π であることは次のようにしてわかる．

$$\begin{aligned} g(t+2\pi) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{4}(t+2\pi-2n\pi)^2\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{4}(t-2(n-1)\pi)^2\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{4}(t-2l\pi)^2\right) \\ &= g(t). \end{aligned}$$

微分可能性，および導関数の連続性は (1) と同様に行う．
(3) 定義に戻って

$$c_n(g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\exp(-inx)\,dx = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{4}t^2+int\right)dt \tag{13.84}$$

となる．複素線積分を用いて計算すると，

$$c_n(g) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\exp(-n^2)\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{4}t^2\right)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi^2}}\exp(-n^2)$$

が得られる．

□

問題 26.

(1) $k \neq 0$ として，

$$\begin{aligned} c_k(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\pi-x}{2}\right)\exp(-ikx)\,dx \\ &= \frac{i}{2\pi k}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\pi-x}{2}\right)(\exp(-ikx))'\,dx \\ &= \frac{i}{2\pi k}\left[\left(\frac{\pi-x}{2}\right)\exp(-ikx)\right]_0^{2\pi} + \frac{i}{4\pi k}\int_0^{2\pi}\exp(-ikx)\,dx \\ &= -\frac{i}{2k} \end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned} S_N(f) &= -\sum_{k=1}^{N}\frac{i}{2k}\exp(ikx) - \sum_{k=-N}^{-1}\frac{i}{2k}\exp(ikx) \\ &= \frac{1}{2}\int_0^x\left\{\left(\sum_{k=-N}^{N}\exp(ikt)\right)-1\right\}dt \end{aligned}$$

となる．

(2) 関係式

$$\int_0^x \frac{\sin nt}{t}\,dt - \int_0^x \frac{\sin nt}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\,dt = \int_0^x \left(\frac{\cos(nt)}{n}\right)' \frac{t-\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{t\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\,dt$$

からもわかるように,

$$\int_0^x D_n(t)\,dt - \int_0^x \frac{\sin(nt)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\,dt \tag{13.85}$$

の $n\to\infty$ の時の一様収束を示せばよい．$D_n(t)$ の定義より,

$$\begin{aligned}\int_0^x D_n(t)\,dt - \int_0^x \frac{\sin(nt)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\,dt &= \int_0^x \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)-\sin(nt)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\,dt\\ &= 2\int_0^x \cos\left(\frac{4n+1}{2}t\right)\,dt\\ &= \frac{4}{4n+1}\sin\left(\frac{4n+1}{2}x\right)\end{aligned}$$

であるから，この一様収束は明らかである．

(3) (2) より,

$$\lim_{N\to\infty} S_N[f]\left(\frac{\pi}{N}\right) = \lim_{N\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{N}} \frac{\sin(Nt)}{t}\,dt = \int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\,dt \tag{13.86}$$

□

問題 27. 定義を書き下してから，部分積分することで

$$\hat{f}(j) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ijt}\,dt = \frac{1}{2\pi(-ij)^n}\int_0^{2\pi} f(t)(e^{-ijt})^{(n)}\,dt = \frac{1}{2\pi(ij)^n}\int_0^{2\pi} f^{(n)}(t)e^{-ijt}\,dt \tag{13.87}$$

となる．したがって，$|\hat{f}(j)| \le K\dfrac{n^{\alpha n}}{|j|^n}$. □

13.7. **第 7 節の解答.**

問題 28.

(1) 三角不等式により,

$$\begin{aligned}|S_n(f,t)| &= |\sigma_n(f,t)| + \sum_{j=-n}^{n} \frac{|j\hat{f}(j)|}{n+1} \\ &\le \|f\|_\infty + \sum_{j=-n}^{n} \frac{K}{n+1} \\ &= \|f\|_\infty + \frac{(2n+1)K}{n+1} \\ &\le \|f\|_\infty + 2K.\end{aligned}$$

(2) $f(t) = 2\sin t - \frac{2}{2}\sin 2t + \frac{2}{3}\sin 3t - \frac{2}{4}\sin 4t + \cdots$.

(3) $K = 1$ として, (1) の不等式を (2) の関数に関して書き下すと,

$$\left| \sum_{j=1}^{n} \frac{2\sin(jt)}{j} \right| = |\sigma_n(f,t)| \le \pi + 2 \tag{13.88}$$

となる.

□

問題 29.

(1) F の連続性は, 可積分関数の不定積分として表されていることから明らかである. 周期性は $\hat{f}(0) = 0$, つまり $\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0$ であることを用いる.

(2) $f(t) = F'(t)$ だから,

$$\hat{f}(j) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ijt}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F'(t)e^{-ijt}\,dt = \frac{ij}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(t)e^{-ijt}\,dt = ij\hat{F}(j)$$

となる.

(3) 仮定によって,

$$2\sum_{n=1}^{N}\left(1 - \frac{n}{N+1}\right)\frac{\hat{f}(n)}{n} = i\sum_{n=-N}^{N}\left(1 - \frac{n}{N+1}\right)\hat{F}(n) = i\sigma_N(F,0) \tag{13.89}$$

だから, F の連続性によって,

$$\lim_{N\to\infty} 2\sum_{n=1}^{N}\left(1 - \frac{n}{N+1}\right)\frac{\hat{f}(n)}{n} = iF(0) \tag{13.90}$$

となる.

(4) $\hat{f}(n) \ge 0$ であるから, 単調収束定理によって,

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N}\left(1 - \frac{n}{N+1}\right)\frac{\hat{f}(n)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\hat{f}(n)}{n} \tag{13.91}$$

となる. (3) によって, この値は有限値であるから $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\hat{f}(n)}{n}$ は収束する.

(5) もし，このような f が存在したならば，(4) より，

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\hat{f}(n)}{n} < \infty \tag{13.92}$$

となってしまう．これは当然

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\log n} \geq \int_3^{\infty} \frac{1}{x\log x}\,dx = \infty \tag{13.93}$$

に矛盾している．

(6) $t \in 2\pi\mathbb{Z}$ なら，各項が 0 だから収束は明らかである．そうでなければ，アーベル判定法から収束が従う．

□

問題 30.

(1) $\sigma_n(f,t)$ の定義を書き下すと，

$$\sigma_n(f,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)\frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}\right)s}{(n+1)\sin^2\frac{s}{2}}\,ds. \tag{13.94}$$

したがって，

$$\begin{aligned}|\sigma_n(f,t)-f(t)| &\leq \frac{K}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|s|^{\alpha}\frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}\right)s}{(n+1)\sin^2\frac{s}{2}}\,ds \\ &\leq \frac{K}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|s|^{\alpha}\min\left(\frac{\pi^2}{(n+1)s^2}, n+1\right)ds \\ &= \frac{K}{\pi}\int_0^{\pi} s^{\alpha}\min\left(\frac{\pi^2}{(n+1)s^2}, n+1\right)ds.\end{aligned}$$

不定積分を計算して

$$\begin{aligned}|\sigma_n(f,t)-f(t)| &\leq \frac{K(n+1)}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{n+1}} s^{\alpha}\,ds + \frac{\pi K}{n+1}\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi} s^{\alpha-2}\,ds \\ &= \frac{\pi K^{\alpha}(n+1)^{-\alpha}}{\alpha+1} - \frac{\pi K^2}{(n+1)(1-\alpha)}\left\{\pi^{\alpha-1} - \left(\frac{\pi}{n+1}\right)^{\alpha-1}\right\} \\ &\leq \frac{\pi K^{\alpha}(n+1)^{-\alpha}}{\alpha+1} + \frac{\pi K}{1-\alpha}\left(\frac{\pi}{n+1}\right)^{\alpha}\end{aligned}$$

(2) (1) と同様に

$$|\sigma_n(f,t)-f(t)| \leq \frac{K(n+1)}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{n+1}} s\,ds + \frac{\pi K}{n+1}\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}\frac{ds}{s} \leq \frac{\pi K}{2(n+1)} + \frac{\pi K}{n+1}\log(n+1) \tag{13.95}$$

となる．ここで，

$$\frac{1}{2} + \log(n+1) \leq 2\log(n+1) \tag{13.96}$$

であるから，

$$|\sigma_n(f,t)-f(t)| \leq 2\pi K\frac{\log(n+1)}{n+1} \tag{13.97}$$

が証明された．

(3) 導関数を計算すると 0 になる．

□

問題 31.

(1) 複素数の方程式

$$\sum_{j=-n}^{n} a_j\, z^{j+n} = 0$$

の解を $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{2n}$ とする．この中で，$\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_l$ は絶対値が 1 でそれ以外は絶対値が 1 ではないとする．このとき，$j = 1, 2, \cdots, l$ に対して，$0 \leq \theta_j < 2\pi$ となる実数 θ_j を用いて $\omega_j = \exp(i\theta_j)$ と表せば，与えられた方程式 (7.12) の解は $t = \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_l$ となる．よって，解の個数は $2n$ を超えていない．

(2) 仮に，(7.13) が成り立たないとする．絶対値 1 の複素数を適当に掛け合わせることで，

$$(L :=) \max_{u\in\mathbb{R}} \left| \sum_{j=-n}^{n} j a_j\, e^{iju} \right| = i \sum_{j=-n}^{n} j a_j > n \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \sum_{j=-n}^{n} a_j\, e^{ijt} \right|$$

と仮定して構わない．実数値関数

$$S(t) = L \sin nt - \sum_{j=-n}^{n} a_j\, e^{ijt}$$

を考える．$\sin nt = 1$ なら，$S(t) > 0$ で，$\sin nt = -1$ なら，$S(t) < 0$ である．したがって，中間値の定理によって，$[0, 2\pi)$ において $S(t)$ は $2n$ 個の異なる解を持つ．それらを $t_1, t_2, \cdots, t_{2n}$ と表そう．ここで，

$$S'(t) = Ln \cos nt - i \sum_{j=-n}^{n} j a_j\, e^{ijt}$$

より，$S'(t) = 0$ である．したがって，順序を付けて

$$0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_{2n} < 2\pi$$

とおける．$[0, 2\pi]$ において，$S(t)$ は $2n+1$ 個の 0 点を持つので，中間値の定理によって

$$0 = t_1 < u_1 < t_2 < u_2 < \cdots < u_{2n-1} < t_{2n} < u_{2n} = 2\pi$$

かつ $S'(u_j) = 0$ となる $u_1, u_2, \cdots, u_{2n}$ が存在する．よって，

$$0 < v_1 < u_1 < v_2 < \cdots < v_{2n} < u_{2n} = 2\pi$$

となる $v_1, v_2, \cdots, v_{2n}$ が存在して，$j = 1, 2, \cdots, 2n$ に対して $S'(v_j) = 0$ となる．一方で，

$$\max_{u\in\mathbb{R}} \left| \sum_{j=-n}^{n} j a_j\, e^{iju} \right| = i \sum_{j=-n}^{n} j a_j$$

より，$S''(0) = 0$ となる．したがって，$[0, 2\pi)$ において，$S''(t) = 0$ は異なる解 $t = 0, v_1, v_2, \cdots, v_{2n}$ を持つ．これは (1) に矛盾している．

(3) (2) を用いて計算していくと，

$$
\begin{aligned}
&\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\sum_{j=-n}^{n} ja_j\, e^{ijt}\right| \\
&\le \sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\mathrm{Re}\left(\sum_{j=-n}^{n} ja_j\, e^{ijt}\right)\right| + \sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\mathrm{Im}\left(\sum_{j=-n}^{n} ja_j\, e^{ijt}\right)\right| \\
&\le n\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\mathrm{Re}\left(\sum_{j=-n}^{n} a_j\, e^{ijt}\right)\right| + n\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\mathrm{Im}\left(\sum_{j=-n}^{n} a_j\, e^{ijt}\right)\right| \\
&\le 2n\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\sum_{j=-n}^{n} a_j\, e^{ijt}\right|
\end{aligned}
$$

が得られる．

□

問題 32.

(1) (a) 和に現れる各項が正であることに注意して，

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty} a_j &= \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{k=j}^{\infty}(a_k - a_{k+1})\right) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\chi_{\{j\ge k\}}(j,k)(a_k - a_{k+1}) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\chi_{\{j\ge k\}}(j,k)(a_k - a_{k+1}) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k(a_k - a_{k+1})
\end{aligned}
$$

となる．

(b) $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N} a_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ であることに留意して，

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} k(a_k - a_{k+1}) &= \lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N} k(a_k - a_{k+1}) \\
&= \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{N} a_k - (N+1)a_{N+1}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} a_j - \lim_{N\to\infty}(N+1)a_{N+1}
\end{aligned}
$$

であることを用いる．

(2) (a) $b_n = a_n - a_{n+1}$ とおくと，$b_n \ge b_{n+1}$ が得られる．$\displaystyle\lim_{j\to\infty} b_j = 0$ であるから，$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は減少単調数列である．また，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \lim_{N\to\infty}(a_1 - a_{N+1}) = a_1 < \infty$ であるから，

(1) が使える．よって，

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(a_{n-1}+a_{n+1}-2a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} n(b_n - b_{n-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1} = a_0$$

となる．

(b) (a) より，ルベーグの積分定理が使える状況になったので，

$$\begin{aligned}\hat{f}(j) &= \sum_{n=1}^{\infty} n(a_{n-1}+a_{n+1}-2a_n)\hat{K_{n-1}}(j) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n(a_{n-1}+a_{n+1}-2a_n)\left(1-\frac{|j|}{n}\right)_+ \\ &= \sum_{n=|j|+1}^{\infty} (a_{n-1}+a_{n+1}-2a_n)(n-|j|) \\ &= \sum_{n=|j|+1}^{\infty} (b_{n+1}-b_n)(n-|j|) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n(b_{n+|j|+1}-b_{n+|j|}) = a_{|j|}\end{aligned}$$

となる．

(c) $g(t) = \dfrac{1}{\log t} \quad (t > 1)$ とおくと，

$$g''(t) = \left(-\frac{1}{t(\log t)^2}\right)' = \frac{1}{t^2(\log t)^2} + \frac{2}{t^2(\log t)^3} > 0 \tag{13.98}$$

である．よって，a_0, a_1, a_{-1} を十分に大きく取って条件 (ii) が成立するように定めて，$a_n = g(n) \quad (n \geq 3)$ とおけば，(2) のように f を定めることによって所望の f が得られる．

□

13.8. 第 8 節の解答.

問題 33.

(1) 三角関数はテーラー展開によって $[-1,1]$ 上多項式関数で一様近似できる．したがって，一様収束は $L^2([-1,1])$ 収束より強いので，$\mathrm{span}\{1, x, x^2, \cdots, \}$ は $L^2([-1,1])$ で稠密である．

(2) $n \geq m$ とする．$\displaystyle\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx = \frac{n!m!}{(n+m+1)!}$ なので，

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 e_n(x)e_m(x)\,dx &= \frac{1}{2^{n+m}n!m!}\sqrt{\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(m+\frac{1}{2}\right)}\int_{-1}^1 \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m\,dx\\
&= \frac{1}{2^{n+m}n!m!}\sqrt{\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(m+\frac{1}{2}\right)}\int_{-1}^1 (1-x^2)^n\frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}}(x^2-1)^m\,dx\\
&= \frac{(n+m)!}{2^{n+m}n!m!}\sqrt{\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(m+\frac{1}{2}\right)}\begin{cases}0 & (n \neq m \text{ のとき})\\ \displaystyle\int_{-1}^1 (1-x^2)^n\,dx & (n = m \text{ のとき})\end{cases}\\
&= \delta_{m,n}
\end{aligned}$$

となる．

□

問題 34.

(1) $\mathcal{F}f(\xi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{ix\xi}\,dx$ は $\{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}(z)| < 1\}$ 上の正則関数で，$\xi \in (-1,1)$ ならば，

(13.99)
$$\mathcal{F}f(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(i\xi)^n}{n!}\int_{\mathbb{R}} f(x)x^n\,dx = 0$$

と計算できる．よって，一致の定理によって，$\mathcal{F}f(\xi) \equiv 0$ が $\xi \in \mathbb{R}$ に対して成り立つ．フーリエ逆変換公式より f が 0 である．

(2) g があらゆる多項式と直交するとする．すなわち，

(13.100)
$$\int_0^\infty g(x)x^{n+k}e^{-x}\,dx = 0$$

と仮定する．$f(x) = \begin{cases} g(x)x^k e^{-x} & (x > 0)\\ 0 & (x \leq 0)\end{cases}$ とする．この f は (1) の条件を満たしているから，$f \equiv 0$ となる．つまり，g 自体も 0 である．

(3) $n, m \in \{0, 1, \cdots\}$ とする．

$$\langle L_n^k, L_m^k\rangle_{L^0((0,\infty),d\mu)} = \frac{1}{n!m!}\int_0^\infty \left[\left\{x^{-k}e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^{k+n}e^{-x})\right\}\frac{d^m}{dx^m}(x^{k+m}e^{-x})\right]dx.$$

である．$n > m$ とすると，

(13.101)
$$\langle L_n^k, L_m^k\rangle_{L^0((0,\infty),d\mu)} = \frac{1}{n!m!}\int_0^\infty \left\{\frac{d^n}{dx^n}(x^{k+n}e^{-x})\right\}\times\left(\frac{(k+m)!}{m!}x^m + \cdots\right)dx$$

であるから，部分積分をして

(13.102)
$$\langle L_n^k, L_m^k\rangle_{L^0((0,\infty),d\mu)} = 0$$

となる．$n = m$ とすると，

(13.103)
$$\langle L_n^k, L_m^k\rangle_{L^0((0,\infty),d\mu)} = \frac{(k+m)!}{n!m!}\int_0^\infty x^{k+n}e^{-x}\,dx = \frac{(k+m)!(k+n)!}{n!m!}$$

となる．よって，$\alpha > 0$ として

(13.104)
$$L_n^k(x) = (-1)^n x^n + \cdots, \quad e_n(x) = \alpha x^n + \cdots$$

と表されることから，

$$e_n(x) = (-1)^n \frac{(k+n)!}{n!} L_n^k(x) \tag{13.105}$$

となる．

□

問題 35.

(1) $f \in L^p(\mathbb{T})$ であることは三角不等式から明らかである．さらに，級数は $L^p(\mathbb{T})$-収束しているから，

$$\hat{f}(n) = \hat{g}(n) + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{|n|}{a_m} \right)_+ \right\} \hat{g}(n) = \hat{g}(n) \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{|n|}{a_m} \right)_+ \right\} \right)$$

(2) (3) のように $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を定めて，

$$h_2(x) \equiv g(x), \quad b_n = \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{|n|}{a_m} \right)_+ \right\} \right)^{-1}, \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{13.106}$$

とおく．問題 8 より，$b_{j+1} + b_{j-1} \geq 2b_j$ となり，(2) の条件がクリアされているので，条件を満たす h_1 を構成できた．

□

13.9. **第 9 節の解答.**

問題 36.

(1) $f, g \in L^2([-\pi, \pi])$ として，2 次形式

$$t \in \mathbb{C} \mapsto \langle f - tg, f - tg \rangle \in \mathbb{C} \tag{13.107}$$

の判別式を用いる．

(2) コーシーシュワルツの不等式より明らかである．

(3) 次の公式よりわかる．

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{4} \sum_{l=1}^{4} i^l \langle f + i^l g, f + i^l g \rangle$$
$$c_n(f)\overline{c_n(g)} = \frac{1}{4} \sum_{l=1}^{4} i^l c_n(f + i^l g)\overline{c_n(f + i^l g)}.$$

これらによって，$f = g$ の場合に帰着できるからである．

【注意】公式

$$\frac{1}{4}\{(a+b)^2 - (a-b)^2\} = ab \tag{13.108}$$

の一般化である．この公式を一般化して，複素数 w, z に対して，

$$w\bar{z} = \frac{1}{4} \left(|w+z|^2 + i|w+iz|^2 - |w-z|^2 - i|w-iz|^2 \right) \tag{13.109}$$

がある．(13.109) を分極公式という．□

問題 37. $|x| = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx)$ とおく．すると，$2\pi a_0 = \pi^2$ である．また，

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi} \sin(nx)\,dx = \frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n} \tag{13.110}$$

である．したがって，

$$\frac{2\pi^3}{3} = \frac{\pi^3}{2} + \frac{32}{\pi} + \cdots + \frac{32}{(2n-1)^4\pi} + \cdots \tag{13.111}$$

となる．よって，

$$\frac{\pi^4}{96} = \frac{1}{1} + \frac{1}{81} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^4} + \cdots \tag{13.112}$$

が得られた． □

問題 38.

(1) 次のように正弦級数展開をする．

$$f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin(nx) + \cdots. \tag{13.113}$$

このときの級数は $a_n = \int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)\,\frac{dx}{\pi}$ となる．部分積分をして

$$a_n = -\int_{-\pi}^{\pi} x(\cos(nx))'\,\frac{dx}{n\pi} = -\frac{1}{n\pi}\left[x\cos(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\,\frac{dx}{n\pi} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

が得られる．したがって，

$$x = 2\sin x - \sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x - \cdots \tag{13.114}$$

となる．パーセバルの等式は

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,dx \tag{13.115}$$

と表すことができる．具体的に

$$\frac{2\pi^3}{3} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}\pi \iff \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \tag{13.116}$$

が得られる．

(2) 次のように余弦級数展開をする．

$$f(x) = a_0 + a_1\cos x + a_2\cos 2x + \cdots + a_n\cos(nx) + \cdots. \tag{13.117}$$

係数を求めよう．$n = 0$ のときは，$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\,dx = \frac{\pi}{2}$ となる．$n \geq 1$ のときは $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos(nx)\,dx$ となるから，

$$a_n = \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} x(\sin(nx))'\,dx = -\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx = -\frac{2+2(-1)^{n+1}}{n^2\pi}.$$

したがって，

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos x - \frac{4}{9\pi}\cos 3x - \cdots \tag{13.118}$$

となる．パーセバルの等式を書き下すと

(13.119) $$\int_{-\pi}^{\pi} |x|^2\,dx = \frac{\pi^3}{2} + \frac{16}{\pi} + \frac{16}{81\pi} + \cdots$$

となる．つまり，$\frac{1}{1} + \frac{1}{81} + \frac{1}{625} + \cdots = \frac{\pi^4}{96}$ が得られる．

(3) 次のように余弦級数展開をする．

(13.120) $$f(x) = a_0 + a_1\cos x + a_2\cos 2x + \cdots + a_n\cos(nx) + \cdots$$

このときの係数は $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx \left(= \frac{\pi^2}{3}\right)$ で，$n \geq 1$ のときは

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos(nx)\,dx$$

で与えられる．部分積分をして

$$a_n = \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2(\sin(nx))'\,dx = \frac{1}{n\pi}\left[x^2\sin(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)\,dx$$

となる．さらに部分積分して

$$a_n = \frac{2}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(\cos(nx))'\,dx = \frac{2}{n^2\pi}\left[x\cos(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{4}{n^2}(-1)^n$$

となる．パーセバルの等式を書き下すと

(13.121) $$\frac{2\pi^5}{9} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4}\pi = \int_{-\pi}^{\pi} x^4\,dx = \frac{2\pi^5}{5}.$$

となる．つまり，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ が得られる．

(4) 次のように余弦級数展開をする．

(13.122) $$f(x) = a_0 + a_1\cos x + a_2\cos 2x + \cdots + a_n\cos(nx) + \cdots$$

このときの係数は

(13.123) $$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\mu x)\,dx = \frac{1}{2\pi\mu}\left[\sin(\mu x)\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\sin(\pi\mu)}{\pi\mu}$$

で，$n \geq 1$ のときは

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\mu x)\cos(nx)\,dx$$

で与えられる．三角加法定理の積和の公式により，

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\cos[(n+\mu)x] + \cos[(n-\mu)x]\right)\,dx$$

となる．ここで，$\mu \notin \mathbb{Z}$ であるから，

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin[(n+\mu)x]}{n+\mu} + \frac{\sin[(n-\mu)x]}{n-\mu}\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{\sin((n+\mu)\pi)}{(n+\mu)\pi} + \frac{\sin((n-\mu)\pi)}{(n-\mu)\pi} \end{aligned}$$

となる．$\sin(\theta+\pi) = -\sin\theta$ より

$$a_n = \frac{(-1)^n\sin(\mu\pi)}{(n+\mu)\pi} - \frac{(-1)^n\sin(\mu\pi)}{(n-\mu)\pi} = -\frac{2\mu(-1)^n\sin(\mu\pi)}{(n^2-\mu^2)\pi}$$

となる．したがって，

$$\cos(\mu x) = \frac{\sin(\pi\mu)}{\pi\mu} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\mu(-1)^n \sin(\mu\pi)}{(n^2-\mu^2)\pi} \cos(nx) \tag{13.124}$$

が得られる．パーセバルの等式は

$$\pi + \frac{\sin(2\pi\mu)}{2\mu} = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(\mu x)\, dx = \frac{2\sin^2(\pi\mu)}{\pi\mu^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\mu^2 \sin^2(\mu\pi)}{(n^2-\mu^2)^2\pi} \tag{13.125}$$

となる．

【注意】

(1) パーセバルの等式を形式的に書き下すだけだと，有効な式が得られない場合がある．
(2) 問題 (2) において

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \frac{1}{256} + \cdots = \frac{\pi^4}{90} \tag{13.126}$$

であるから，これを 16^{-1} 倍して

$$\frac{1}{16} + \frac{1}{256} + \cdots = \frac{\pi^4}{90 \cdot 16}. \tag{13.127}$$

したがって，辺々引いて

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{81} + \frac{1}{625} + \cdots = \frac{\pi^4}{96} \tag{13.128}$$

が得られる．

□

問題 39.

(1) (3.18) でやった方法を真似るか，変数変換をして (3.18) を変形するかして計算できるので省略.
(2) (1) にパーセバルの等式を適用する．

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n^2} \right)^2 d\theta \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{(\theta-\pi)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} \right\}^2 d\theta \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{\theta^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} \right\}^2 d\theta \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\theta^4}{16} - \frac{\pi\theta^2}{24} + \frac{\pi^4}{144} \right) d\theta.
\end{aligned}$$

である．この定積分を計算していくと，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = 2\pi^4 \left(\frac{1}{80} - \frac{1}{72} + \frac{1}{144} \right) = 2\pi^4 \left(\frac{1}{80} - \frac{1}{144} \right) = 2\pi^4 \left(\frac{9-5}{720} \right) = \frac{\pi^4}{90}$$

となる．

□

13.10. 第 10 節の解答.

問題 40. 級数が絶対一様収束するので，有界連続関数であることは明らかであるが，ヘルダーノルムの評価は次のようにして行う．

$$|2^{-n\alpha}\cos(2^n x) - 2^{-n\alpha}\cos(2^n y)| \le \min(2^{n(1-\alpha)}|x-y|, 2^{1-n\alpha}) \tag{13.129}$$

である．したがって，

$$\begin{aligned}
|w(x)-w(y)| &\le \sum_{n=1}^{\infty} \min(2^{n(1-\alpha)}|x-y|, 2^{1-n\alpha}) \\
&\le \frac{1}{\log 2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{2^n}^{2^{n+1}} \min(2^{n(1-\alpha)}|x-y|, 2^{1-n\alpha})\frac{dt}{t} \\
&\le \frac{1}{\log 2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{2^n}^{2^{n+1}} \min(t^{1-\alpha}|x-y|, 2^{1+\alpha}t^{-\alpha})\frac{dt}{t} \\
&\le \frac{2^{1+\alpha}}{\log 2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{2^n}^{2^{n+1}} \min(t^{1-\alpha}|x-y|, t^{-\alpha})\frac{dt}{t}
\end{aligned}$$

となる．変数変換をして，

$$\begin{aligned}
|w(x)-w(y)| &\le \frac{2^{1+\alpha}}{\log 2}\int_0^{\infty} \min(t^{1-\alpha}|x-y|, t^{-\alpha})\frac{dt}{t} \\
&= |w(x)-w(y)|\int_0^{\infty} \min(s^{1-\alpha}|x-y|^{\alpha}, s^{-\alpha}|x-y|^{\alpha})\frac{ds}{s} \\
&= |x-y|^{\alpha} \times \frac{2^{1+\alpha}}{\log 2}\int_0^{\infty} \min(s^{1-\alpha}, s^{-\alpha})\frac{ds}{s}.
\end{aligned}$$

最後の積分は無限大ではない定数だから，証明が完了した． □

問題 41. $\hat{f}(j)\hat{g}(j) = \dfrac{1}{2\pi}f \hat{*} g(j)$ であるから，コーシーシュワルツの不等式によって主張は明らかである． □

問題 42.

(1) 数列に関する Fatou の補題より明らかである．
(2) 一様収束性より，

$$\lim_{k\to\infty} \hat{f}_k(j) = \hat{f}(j) \tag{13.130}$$

となる．Fatou の補題より，

$$
\begin{aligned}
&2\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\hat{f}(j)| - \limsup_{k\to\infty}\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\hat{f}_k(j)-\hat{f}(j)|\right)\\
&=\liminf_{k\to\infty}\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\hat{f}_k(j)|+|\hat{f}(j)|\right) - \limsup_{k\to\infty}\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\hat{f}_k(j)-\hat{f}(j)|\right)\\
&=\liminf_{k\to\infty}\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\hat{f}_k(j)|+|\hat{f}(j)|-|\hat{f}_k(j)-\hat{f}(j)|\right)\\
&\geq\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}\liminf_{k\to\infty}|\hat{f}_k(j)|+|\hat{f}(j)|-|\hat{f}_k(j)-\hat{f}(j)|\right)\\
&=2\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\hat{f}(j)|
\end{aligned}
$$

となる．この式を紐解くと $f_k \to f$ が $\mathbb{A}(\mathbb{T})$ の位相で成立していることが得られる．

(3) $M=\sup_{t\in\mathbb{R}}|\sin t\sin 4t|$ とおく．すると，$\sin t, \sin 4t$ の絶対値は同時には 1 にはならないから，$M<1$ である．

$f_N(x)=\prod_{j=1}^{2N}\sin 4^j t$ と定める．$|f_N(x)|\leq M^N$ であるから，f_N は 0 に一様収束する．

また，

$$
\sharp\left\{\sum_{j=1}^{2N}\varepsilon_j 4^j \,:\, \varepsilon_j\in\{-1,1\},\quad j=1,2,\cdots,2N\right\}=4^N \tag{13.131}
$$

であるから，$\|f_N\|_{\mathbb{A}(\mathbb{T})}=1$ である．このような $\{f_N\}_{N=1}^{\infty}$ は確かに (3) の条件を満たしている．

□

問題 43.

(1) 数学的帰納法を用いる．

(2) P_m の作り方を詳しく調べる．帰納法で

$\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}\in\{-1,1\}$ が存在して，$P_m(t)=\sum_{k=0}^{2^m-1}\varepsilon_k e^{ikt}$ が成り立つことと $\{\varepsilon'_n\}_{n=0}^{\infty}\in\{-1,1\}$ が存在して，$Q_m(t)=\sum_{k=0}^{2^m-1}\varepsilon'_k e^{ikt}$ が成り立つことを示せる．

(3) f の定義から

$$
\|f\|_{\mathbb{A}(\mathbb{T})}=\sum_{m=1}^{\infty}2^{-m}\|f_m\|_{\mathbb{A}(\mathbb{T})}=\sum_{m=1}^{\infty}2^{-m}\cdot 2^m=\infty \tag{13.132}
$$

となる．

(4) $\|Q_m\|_\infty\leq 2^{(m+1)/2}$ より，f を定義している無限級数は一様収束しているから明らかである．

□

問題 44.

(1) $\Delta_a(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nt)$ とフーリエ級数展開する．すると，

(13.133)
$$a_0=\frac{a}{2\pi},\ a_n=\frac{2}{\pi a}\int_0^a (a-t)\cos(nt)\,dt=\frac{2}{n\pi a}\int_0^a \sin(nt)\,dt=\frac{2(1-\cos(na))}{n^2\pi a},\quad (n\geq 1)$$

となる．したがって，係数はすべて正であるから，

(13.134)
$$\|\Delta_a\|_{\mathbb{A}(\mathbb{T})}=\sum_{n=0}^{\infty} a_n=\Delta_a(0)=1$$

となる．

(2) g_N を $(\pi j/N, f(\pi j/N))\quad (j=0,1,2,\cdots,N)$ を結んで得られるグラフであるとすると，凸性から $g_N(x)\geq f(x)$ がわかる．f の一様連続性から，$g_N\to f$ が一様収束することがわかる．よって，グラフを書いてみればわかるように，g_N は $\mathcal{Z}$ に属する関数であるから，所望の一様近似が得られた．

(3) (1),(2) より

(13.135)
$$f\in\mathbb{A}(\mathbb{T}),\quad \hat{f}(j)\geq 0$$

が得られる．したがって，

(13.136)
$$\|f\|_{\mathbb{A}(\mathbb{T})}=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\hat{f}(j)=f(0)$$

となる．

□

問題 45. パーセバルの等式を用いる． □

13.11. **第 11 節の解答.**

問題 46.

(1) 省略.

(2) S_N などの定義を考えれば，この等式は明らかである．

(3) 任意の n に対して，

(13.137)
$$\|S_N\|_{L^1(\mathbb{T})\to L^1(\mathbb{T})}\geq\|S_N(K_n,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{T})}=\|\sigma_n(D_N,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{T})}$$

であるから，$n\to\infty$ として，

(13.138)
$$\|S_N\|_{L^1(\mathbb{T})\to L^1(\mathbb{T})}\geq\|D_N\|_{L^1(\mathbb{T})}$$

を得る．逆向きの不等式は作用素 S_N の定義を書き下して，積分の三角不等式を用いれば明らかである．

(4) 2 通りの方法で証明する．

(a) 【関数解析を用いる方法】共鳴原理より，仮に $S_N(f,\cdot)\to f$ が成立したとしたら $\sup_{N\in\mathbb{N}}\|S_N\|_{L^1(\mathbb{T})\to L^1(\mathbb{T})}<\infty$ となるはずであるが，これはありえないことは問題 6 で確認済みである．

(b) 【具体的に構成する方法】はじめに，$K\in\mathbb{N}$ を $n\geq K$ ならば，

(13.139)
$$\|D_n\|_{L^1(\mathbb{T})}>\log n$$

となるようにとる．次に，$n\geq K$ に対して，$J(n)$ を $m\geq J(n)$ なら

(13.140)
$$\|D_n * K_m\|_{L^1(\mathbb{T})}=\|\sigma_m(D_n,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{T})}>\log n$$

となるようにとる．必要なら，$J(n)$ を $J(n)+J(n-1)+\cdots+J(K)$ となるようにとって $\{J(n)\}_{n=K}^{\infty}$ を単調増大となると仮定してよい．そして，$\{a(j)\}_{j=K}^{\infty}$ を

$$a(K)=J(K), \quad a(j+1)=J(a(j)), \quad (j=K,K+1,\cdots) \tag{13.141}$$

$$f(t)=\sum_{n=K}^{\infty}\frac{1}{3^n}K_{J(a(n!))} \tag{13.142}$$

とする．$m \ge K$ とする．

$$\|K_{J(a(n!))}\|_{L^1(\mathbb{T})}=1,\ \|S_{a(m!)}(K_{a(n!)},\cdot)\|_{L^1(\mathbb{T})} \le \frac{4}{\pi}\log n+C \tag{13.143}$$

より，

$$\begin{aligned}
&\|S_{a(m!)}(f,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{T})}\\
&=\left\|\sum_{n=K}^{m-1}\frac{1}{3^n}K_{J(a(n!))}+\frac{1}{3^m}S_{a(m!)}(K_{J(a(m!))},\cdot)+\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{3^n}S_{a(m!)}(K_{a(n!)},\cdot)\right\|_{L^1(\mathbb{T})}\\
&\ge \frac{1}{3^m}\|S_{a(m!)}(K_{J(a(m!))},\cdot)\|_{L^1(\mathbb{T})}-\sum_{n=K}^{m-1}\frac{1}{3^n}\|K_{J(a(n!))}\|_{L^1(\mathbb{T})}\\
&\quad -\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\|S_{a(m!)}(K_{a(n!)},\cdot)\|_{L^1(\mathbb{T})}\\
&\ge \frac{1}{3^{m+1}}\log(m!)-C
\end{aligned}$$

となる．よって，$\|S_{a(m!)}(f,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{T})}\to\infty$ が得られる．したがって，$S_{a(m!)}(f,\cdot)\to f$ は $L^1(\mathbb{T})$ の位相では収束しない．

□

問題 47.

(1) 省略.
(2) 有界関数 f_∞ を次のように定める．

$$f_\infty(t)=\mathrm{sgn}(D_N(t))=\begin{cases}1 & (D_N(t)>0 \text{ のとき})\\ 0 & (D_N(t)=0 \text{ のとき})\\ -1 & (D_N(t)<0 \text{ のとき})\end{cases} \tag{13.144}$$

すると，

$$|D_N(t)|=f_\infty(t)D_N(t) \tag{13.145}$$

である．$|f(t)|\le|f_\infty(t)|$ となるように連続関数 f を $|f(t)|\ne|f_\infty(t)|$ となる点 t 全体のなす集合の測度を十分に小さくなるように取れば，確かに条件に適っている f が作れる．

(3) (2) の f を ψ_n と書くことにして，$\varphi_n(t)=\sigma_{n^2}(f,\psi_n)(t)$ とおく．すると，S_n の定義によって，

$$S_n(\varphi_n)(t)-S_n(\psi_n)(t)=-\sum_{k=-n}^{n}\frac{k}{n^2+1}\hat{\psi_n}(k)\exp(ikt) \tag{13.146}$$

であるから，

$$|S_n(\varphi_n,0)|>\|D_n\|_{L^1}-2 \tag{13.147}$$

となる．そこで，数列 a_n を $a_n = (a_1 a_2 \cdots a_{n-1})^2$, $(n \geq 2)$, $a_1 = 3$ で定めて，

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \varphi_{a_n}(a_n t) \tag{13.148}$$

とおく．${a_{n-1}}^2 \leq a_n$, $(n \geq 2)$ であるから，

$$S_{a_n}(F, 0) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j^2} \varphi_{a_j}(0) + S_{a_n}(\varphi_{a_n}, 0) + \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \hat{\varphi_{a_j}}(0) \geq \frac{\|D_{a_n}\|_{L^1} - 2}{n^2} - \frac{\pi^2}{6} \tag{13.149}$$

となる．$\left\{ \dfrac{\|D_{a_n}\|_{L^1}}{\log(a_n + 1)} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ が下に有界であるから，これは確かに発散している．

【注意】(13.149) において，$\varphi_{a_j}(0)$ は関数 φ_{a_j} の 0 の値で，$\hat{\varphi_{a_j}}(0)$ は関数 φ_{a_j} の第 0 フーリエ係数であるから注意せよ． □

問題 48.

(1) 3 つの段階に分けて考える．

【第 1 段階】f のフーリエ級数が E 上至るところ発散しているとする．まずは，f を用いて自然数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$\|\sigma_{a_n}(f) - f\|_X \leq 2^{-n},\ a_{n+1} \geq 2a_n \tag{13.150}$$

となるように取ろう．そして，

$$g = f + \sum_{n=1}^{\infty} (f - \sigma_{a_n}(f)) \tag{13.151}$$

と定める．すると，

$$\Omega_j = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{|j|}{a_n + 1} \right)_+ \right\} \tag{13.152}$$

とおけば，$\hat{g}(j) = \Omega_j \hat{f}(j)$ となる．$S^*(g, t) < \infty$ と仮定する．すると，$n > m$ として，

$$\begin{aligned} S_n(f, t) - S_m(f, t) &= \sum_{k=m+1}^{n} \frac{S_j(g, t) - S_{j-1}(g, t)}{\Omega_j} \\ &= \frac{S_n(g, t)}{\Omega_n} - \frac{S_m(g, t)}{\Omega_{m+1}} + \sum_{k=m+1}^{n-1} \left(\frac{1}{\Omega_j} - \frac{1}{\Omega_{j+1}} \right) S_j(g, t) \end{aligned}$$

であるから，

$$|S_n(f, t) - S_m(f, t)| \leq 3S^*(g, t) {\Omega_{m+1}}^{-1} \tag{13.153}$$

となり，$S_n(f, t)$ は収束している．したがって，$S^*(g, t) < \infty$ と仮定すると，$t \in E$ となる．

ここで，$\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\Omega_j} - \frac{1}{\Omega_{j+1}} \right) < \infty$ で各項は単調減少であるから，狭義単調増大で ∞ に発散する数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ が取れて，

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\Omega_j} - \frac{1}{\Omega_{j+1}} \right) z_j < \infty \tag{13.154}$$

を満たす．$\omega_j = \min(z_j, \Omega_j)$ とおく．すると，$\alpha = \limsup_{j \to \infty} \frac{S_j(g,t)}{\omega_j} > 0$ である．実際に，そうではないと

$$S_n(f,t) - S_m(f,t) = \frac{S_n(g,t)}{\Omega_n} - \frac{S_m(g,t)}{\Omega_{m+1}} + \sum_{k=m+1}^{n-1} \left(\frac{1}{\Omega_j} - \frac{1}{\Omega_{j+1}} \right) S_j(g,t) \tag{13.155}$$

に矛盾してしまう．
したがって，

$$S_j(g,t) > \frac{\alpha}{2}\omega_j \tag{13.156}$$

となるような j が無限に存在する．
再び，単調増大数列 $\{b_j\}_{j=1}^{\infty}$ と $\{\mu_j\}_{j=1}^{\infty}$ を

$$\omega_{\mu_j} > \frac{4}{\alpha} \sup_{t \in E} S^*(\sigma_{b_j}(g), t) \tag{13.157}$$

となるように取る．そして，

$$P_j = (2K_{2\mu_{j+1}+1} - K_{\mu_{j+1}}) * (g - \sigma_{b_j}(g)) \tag{13.158}$$

とおく．すると，この $\{P_j\}_{j=1}^{\infty}$ は

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|P_j\|_X < \infty \tag{13.159}$$

を満たしているし，また，$n \in \mathbb{N}$ が

$$|S_n(g,t)| > \frac{1}{2}\alpha\omega_n \tag{13.160}$$

を満たしていると，$\mu_j < n \le \mu_{j+1}$ となる j を取ることによって，

$$S_n(P_j, t) = S_n(f - \sigma_{b_j}, t) = S_n(g,t) - S_n(\sigma_{b_j} g, t) \tag{13.161}$$

だから，

$$|S_n(P_j,t)| \ge |S_n(g,t)| - |S_n(\sigma_{b_j} g, t)| \ge \frac{\alpha}{2}\omega_n - \frac{\alpha}{4}\omega_{\mu_j} > \frac{\alpha}{2}\omega_n \tag{13.162}$$

となる．よって，$S^*(P_j, t) = \infty$ が得られた．以上で，(i) ならば (iii) が証明された．
【第 2 段階】(iii) を仮定して (ii) を示そう．三角多項式は，

$$P_j(t) = \sum_{k=1}^{m_j} a_{j,k} \exp(ikt) \tag{13.163}$$

の形をしているとしてよい．

$$Q_1(t) = P_1(t), \quad Q_j(t) = \exp(i(m_1 + m_2 + \cdots + m_{j-1})t) P_j(t) \tag{13.164}$$

とする．ここで，

$$f(t) = \sum_{j=1}^{\infty} Q_j(t) \tag{13.165}$$

と定めると，

$$\|f\|_X \le \sum_{j=1}^{\infty} \|Q_j\|_X = \sum_{j=1}^{\infty} \|P_j\|_X < \infty \tag{13.166}$$

であるから，$f \in X$ である．また，

$$2S^*(f,t) \ge 2S_{m_1+m_2+\cdots+m_j}(f,t) \ge S^*(Q_j,t) = \infty \quad (j \in \mathbb{N}) \tag{13.167}$$

であるから，(ii) を確かめられた．
【第 3 段階】(ii) は (i) よりも明らかに強い条件である．

(2) (1) より，各 $j \in \mathbb{N}$ に対して，三角多項式の列 $\{P_{j,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ で，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|P_{j,k}\|_X \le 2^{-j}, \quad \sup_{k\in\mathbb{N}} S^*(P_{j,k},t)=\infty \quad (t\in E_j) \tag{13.168}$$

となるものが存在する．$\{P_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{N}}$ を並べ替えて得られる三角多項式の列を $\{Q_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ とすると，

$$\sum_{l=1}^{\infty}\|Q_l\|_X \le 1, \quad \sup_{l\in\mathbb{N}} S^*(Q_l,t)=\infty \quad (t\in E) \tag{13.169}$$

となる．よって，(1) の条件が使える状況になった．

□

問題 49.

(1) $ze^{-it_0}=w$ をおく．すると，$|w|\le 1$ で，

$$\frac{1}{1+\varepsilon-w}+\frac{1}{1+\varepsilon-\overline{w}}=\frac{2+2\varepsilon-2\mathrm{Re}(w)}{|1+\varepsilon-w|^2}\ge 0 \tag{13.170}$$

だから，$\mathrm{Re}(\psi(z))>0$ となる．

(2) 仮定の条件の下で複素数の三角不等式と $|\sin\varphi|\le\varphi(\varphi>0)$ を用いると，

$$|1+\varepsilon-\exp(i(\theta-t_0))|\le\varepsilon+2\left|\sin\left(\frac{\theta-t_0}{2}\right)\right|\le 2\varepsilon \tag{13.171}$$

である．この不等式の逆数を取れば (2) が得られる．

□

問題 50. 区間 $I_1,I_2,\cdots,I_N$ を用いて，$E=\bigcup_{j=1}^{N} I_j$ と表す．ただし，各 I_j は $I_j=\{e^{i(t-t_j)}:|t-t_j|<\varepsilon\}$ と表されて，$N\varepsilon<\delta$ を満たしているとする．

$$\psi(z)=\frac{1+\varepsilon}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{1+\varepsilon-ze^{-it_j}} \tag{13.172}$$

とおく．すると，

$$\mathrm{Re}(\psi(z))>0,\ |z|\le 1,\ \psi(0)=1,\ |\psi(z)|\ge\frac{1}{3N\varepsilon}\ge\frac{1}{3\delta} \tag{13.173}$$

が E 上で得られる．

$$\arg(\psi(z))<\pi,\ z\in S^1 \tag{13.174}$$

かつ

$$|\log\psi(z)|>\log\left(\frac{1}{3\delta}\right),\ z\in E \tag{13.175}$$

となる．ここで，$\log\psi(z)$ のテーラー多項式が一様収束するから，テーラー展開の項を多くとって，

$$\arg(\Phi(z))<\pi,\ z\in S^1 \tag{13.176}$$

かつ

$$|\log\Phi(z)|>\log\left(\frac{1}{3\delta}\right),\ z\in E \tag{13.177}$$

とできる．

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi} e^{-iMt} \mathrm{Im}(\Phi(e^{it})) \tag{13.178}$$

とおくと，

$$|S_M(\phi, t)| = \frac{1}{2\pi} |\Phi(e^{it})| \tag{13.179}$$

となる．

F を与えられた 0 集合とする．このとき，次の条件を満たしている集合列 $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ を構成できる．

(1) 各 F_n は有限個の開区間からなる．
(2) $|F_n| < \exp(-n^2)$.
(3) $x \in F$ に対して，$x \in F_n$ となる n が無限に存在する．

各 F_n に対して，最初にやった φ を構成してそれを φ_n とおく．問題 48(2) の判定を用いれば，F 上至るところ発散するフーリエ級数が存在することになる． □

問題 51.

(1) ほとんどすべての t に対して，$t - x_1, t - x_2, \cdots, t - x_N, \pi$ は線形独立であるから，

$$\left| \exp\left(n + \frac{1}{2}\right)(t - x_j) - i \mathrm{sgn}\left(\sin \frac{t - x_j}{2}\right) \right| < \frac{1}{2} \tag{13.180}$$

となる．ここで，

$$\frac{1}{2N} \sum_{j=1}^{N} \left| \sin \frac{t - x_j}{2} \right|^{-1} > \log N \tag{13.181}$$

が示される．

(2) 問題 48(2) より，与えられた測度正の集合 E 上でいたるところ発散する $L^1(\mathbb{T})$ のフーリエ級数を作ればよい．

(1) より，

$$\varphi_k = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} (2\sigma_{2N_k+1}(t - x_j) - \sigma_{N_k}(t - x_j)) \tag{13.182}$$

とおくと，E_k が存在して，

$$|E_k| > 1 - 1/k,\ S^*(\varphi_k, t) > \log N,\ t \in E_k \tag{13.183}$$

となる．

□

13.12. 第 12 節の解答.

問題 52. $x(\pi - x)$ を奇関数だと思ってフーリエ展開する．

$$x(\pi - x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \sin(jx). \tag{13.184}$$

ここで,

$$\begin{aligned}a_j &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x(\pi - x)\sin(jx)\,dx\\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x(\pi - x)\left(-\frac{1}{j}\cos(jx)\right)'\,dx\\ &= \frac{2}{\pi}\left[x(\pi - x)\left(-\frac{1}{j}\cos(jx)\right)\right]_0^\pi + \frac{2}{\pi j}\int_0^\pi(\pi - 2x)\cos(jx)\,dx\\ &= \frac{2}{\pi j^2}\int_0^\pi(\pi - 2x)(\sin(jx))'\,dx\\ &= \frac{4(1-(-1)^j)}{\pi j^3}\end{aligned}$$

となる．したがって,

$$x(\pi - x) = \sum_{j=1}^\infty \frac{8}{\pi(2j-1)^3}\sin(2j-1)x \tag{13.185}$$

が得られる．よって，熱方程式の解は

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^\infty \frac{8}{\pi(2j-1)^3}\exp(-(2j-1)^2t)\sin(2j-1)x \tag{13.186}$$

となる．

この関数が項別微分ができて

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 \tag{13.187}$$

となることを示そう．

$$u_t(x,t) = \sum_{j=1}^\infty \frac{8}{\pi(2j-1)^3}\partial_t[\exp(-(2j-1)^2t)]\sin(2j-1)x,\ t>0 \tag{13.188}$$

のみ示す．$t_0>0$ を任意に取って，$t>t_0$ で微分ができることを示せばよい．この場合は,

$$\exp(-(2j-1)^2t) \le \exp(-(2j-1)^2t_0) \tag{13.189}$$

を用いることができて，一様収束していることを示すことができる． □

問題 53. はじめに,

$$|x| = \sum_{j=-\infty}^\infty a_j\cos(jx),\quad |x|\le\pi \tag{13.190}$$

とフーリエ級数展開をする．すると,

$$a_0 = \frac{\pi}{2},\quad a_j = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos(jx)\,dx = \frac{2}{j\pi}\int_0^\pi\sin(jx)\,dx = \frac{2}{j^2\pi}(1-(-1)^j),\quad j\in\mathbb{N} \tag{13.191}$$

となる．したがって,

$$|x| = \frac{\pi}{2} + \sum_{j=1}^\infty \frac{4}{\pi(2j-1)^2}\cos(2j-1)x \tag{13.192}$$

なる展開が得られた．したがって，波動方程式の解は

$$u(x,t) \equiv \frac{\pi}{2} + \sum_{j=1}^\infty \frac{4}{\pi(2j-1)^2}\cos(2j-1)x\cos(2j-1)t \tag{13.193}$$

となる． □

Part 3. 積分論の基本定理（澤野，ベゾフ空間論 (日本評論社) より一部改変して抜粋）

14. 積分に関する定理

ここで，よく使う積分に関する定理をまとめておく．証明は英文のノートを確認すること．積分の章には特別な場合の証明が載っている．

定理 14.1 (積分の収束定理)**.** $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間とする．$\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ は $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$-値もしくは $\mathbb{C}$-値の μ-可測関数の列とする．

(1) (単調収束定理) $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ は正の増大列，すなわちすべての $j \in \mathbb{N}$ につき μ-ほとんどいたる所 $0 \le f_j \le f_{j+1}$ と仮定するとき，

$$\lim_{j\to\infty} \int_X f_j(x)\, d\mu(x) = \int_X \lim_{j\to\infty} f_j(x)\, d\mu(x) \tag{14.1}$$

が成り立つ．

(2) (ファトゥ(Fatou) の補題) $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ は正の関数列とする．このとき，

$$\int_X \liminf_{j\to\infty} f_j(x)\, d\mu(x) \le \liminf_{j\to\infty} \int_X f_j(x)\, d\mu(x) \tag{14.2}$$

が成り立つ．

(3) (有界収束定理，ルベーグ (Lebesgue) の収束定理) $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ は μ-ほとんどいたる所 f に収束するとする．さらに，$g \in L^1(\mu)$ が存在してすべての自然数 j に対して μ-ほとんどいたる所 $|f_j| \le g$ が成り立つと仮定する．このとき，

$$\lim_{j\to\infty} \int_X f_j(x)\, d\mu(x) = \int_X f(x)\, d\mu(x) \tag{14.3}$$

が成り立つ．

定理 14.2 (微分演算，積分演算の順番入れ替え定理)**.** $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間とする．関数 $f : X \times (a,b) \to \mathbb{C}$ が次の条件を満たしているとする．

(1) $t \in (a,b)$ を固定すると，$f(\star, t)$ は μ-可積分関数である．
(2) μ-ほとんどすべての $x \in X$ に対して $t \mapsto f(x,t)$ は $t \in (a,b)$ において微分可能である．
(3) μ-可積分な関数 g が存在して，微分不等式 $\left|\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \le g(x)$, $t \in (a,b)$ を μ-ほとんどすべての $x \in X$ に対して満たしている．

このとき，微分と積分の順序の入れ替え

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_X f(x,t)\, d\mu(x) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\, d\mu(x) \tag{14.4}$$

が成り立つ．

定理 14.3 (フビニ (Fubini) の定理)**.** $(X, \mathcal{M}, \mu)$ と $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ を完備な測度空間，$(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}, \mu \otimes \nu)$ を直積外測度

$$\mu^*(E) = \inf\left\{ \sum_{j=1}^\infty \lambda_0(C_j) : \text{各 } C_j \text{は可測長方形で } E \subset \bigcup_{j=1}^\infty C_j \right\} \tag{14.5}$$

から誘導される $X \times Y$ 上の測度空間とする．f を正値可測関数，もしくは可積分関数とするとき，

(1) μ-ほとんどいたるところ $x \in X$ に関して $f_x := f(x, \star)$ は可積分である．
(2) μ-ほとんどいたるところ $x \in X$ に関して $x \in X \mapsto \displaystyle\int_Y f_x\, d\nu$ は可積分関数である．

(3) 等式

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\,d\mu\otimes\nu(x,y) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\right)\,d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,d\mu(x)\right)\,d\nu(y)$$

が成り立つ．

これらは積分に関する基本定理である．そのほかに積分に関する不等式はよく使うので，基本的な不等式をまとめておく．

$(X,\mathcal{B},\mu)$ を測度空間とする．まず，$1\le p<\infty$ に対して，

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f(x)|^p\,d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \tag{14.6}$$

とする．また，$p=\infty$ のときは，

$$\|f\|_p := \inf\{\lambda>0 : \text{ほとんどすべての } x\in\mathbb{R}^n \text{ に対して } |f(x)|\le\lambda\}$$

と定める．

定理 14.4 (積分不等式)**.** $(X,\mathcal{B},\mu)$ を測度空間とする．次の不等式が成り立つ．ただし，最後のヤングの不等式はルベーグ測度空間で考えているとする．

(1) (三角不等式 (Triagle inequality)) $\|f+g\|_p\le\|f\|_p+\|g\|_p$, $f,g\in L^p$, $1\le p\le\infty$.
(2) (ヘルダー (Hölder) の不等式) $0<p,q,r\le\infty$, $\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}$ とするとき，$f\in L^p$ と $g\in L^q$ に対して，$\|fg\|_r\le\|f\|_p\|g\|_q$.
(3) (ミンコフスキー (Minkowski) の不等式) $1\le p\le\infty$ とするとき，$f,g\in L^p$ に対して，$\|f+g\|_p\le\|f\|_p+\|g\|_p$.
(4) (チェビシェフ (Chebyshev) の不等式) $f\in L^1(\mu)$, $\lambda>0$ とするとき，

$$\mu\{|f|>\lambda\}\le\frac{1}{\lambda}\int_X |f(x)|\,d\mu(x). \tag{14.7}$$

(5) (ヤング (Young) の不等式) $1\le p,q,r\le\infty$, $\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}-1$ とするとき，$f\in L^p$ と $g\in L^q$ に対して，$\|f*g\|_r\le\|f\|_p\cdot\|g\|_q$.

Part 4. ルベーグ積分に関する詳論 (日本語，短い)

Abstract. リーマン積分はある意味で不完全で繊細なものである．解析学を深く理解するためには解析学の決定的な積分理論として，我々は統合された新たな枠組み，つまりルベーグ積分の理論を必要とする．したがって，我々は最小限の理論を導入してルベーグ積分の理論と次の基本的な定理を与える．

(1) 単調収束定理 (定理 16.6)，ファトゥの補題 (定理 16.8)，ルベーグの収束定理 (定理 16.12).
(2) フビニの定理 (定理 16.21).

15. n 次元ルベーグ測度

15.1. **可測集合の定義とルベーグ測度.** 可測という単語に出くわした場合読者は『その集合の面積，体積が決定できる』と理解してほしい．重要であるのは私たちは何を測定するかではなく，どのように測定するかということである．実際に，$\mathbb{R}^n$ の内のすべての部分集合をすべてを満足に測定するのは不可能であるとあきらめざるを得ない．

ルベーグ積分論において，可算集合というものは極めて重要なものであるので，ここに定義とよく使う例を挙げておこう．

定義 15.1 (可算集合)**.** 無限集合 E が可算であるとは写像 $\varphi : \mathbb{N} \to E$ が存在して，$\varphi(\mathbb{N}) = E$ となることである．

例 15.2. $\{0, 1, 2, \cdots\}$，$\mathbb{Z}$，$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(i, j) : i, j \in \mathbb{N}\}$ は可算である．

積分とは，いろいろな図形の面積，体積を測るという側面もあるが，直方体はそのような図形の中で一番基本的な図形である．

定義 15.3 (直方体とその体積)**.** $2n$ 個の実数 $-\infty < a_j \leq b_j < \infty$, $(j = 1, 2, \cdots, n)$ を用いて $\prod_{j=1}^{n}[a_j, b_j) = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \cdots [a_n, b_n)$ と表せる集合全体を $\mathcal{R}$ と表す．これを直方体という．直方体の体積は $\left|\prod_{j=1}^{n}[a_j, b_j)\right| = \prod_{j=1}^{n}(b_j - a_j)$ と定める．

$n = 1$ のときは体積のことを長さといい，$n = 2$ のときは体積のことを面積という．

注意 15.4. このような直方体を用いる利点は次の例が示すように，合体ができることである．

(1) $[0, 1) \times [0, 1) \times [0, 1) \cup [1, 2) \times [0, 1) \times [0, 1) = [0, 2) \times [0, 1) \times [0, 1)$ である．左辺に現れる二つの立方体に共通部分がないことに注意しよう.『 [』を『 (』に,『] 』を『) 』に置き換えても同じことが言えるが，ここでは右側の端点を外すことにする．
(2) 閉区間を用いて考えると，$[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] \cup [1, 2] \times [0, 1] \times [0, 1] = [0, 2] \times [0, 1] \times [0, 1]$ である．左辺に現れる二つの立方体の共通部分は $\{1\} \times [0, 1] \times [0, 1]$ でダブりが生じることに注意しよう．$\{1\} \times [0, 1] \times [0, 1]$ は厚さがないために，体積 0 であると考えることもできるが，ルベーグ積分論においては共通部分がないものの和集合の体積はそれぞれの体積の和になるという原則がある．したがって，慎重に扱えば，閉区間で理論を構成できるが，面倒になる場合もあるので，ここでは閉区間は合併を取ると重なりが生じるという理由から体積を図る際の基本単位とはみなさない．
(3) 開区間を用いて考えると，$(0, 1) \times (0, 1) \times (0, 1) \cup (1, 2) \times (0, 1) \times (0, 1) = (0, 2) \times (0, 1) \times (0, 1) \setminus \{1\} \times (0, 1) \times (0, 1)$ であるから和を考えると今度は不足分が生じる．

直方体を用いて，長さ，面積，体積を測るためのルベーグ外測度を定義しよう．$|R_j|$ で直方体の体積を表す．

定義 15.5 (ルベーグ外測度)**.** $A \subset \mathbb{R}^n$ とする．ルベーグ外測度 $m^*(A)$ とは

$$m^*(A) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |R_j| : \text{各 } R_j \text{ は直方体で, } A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j \right\} (\in [0, \infty]) \tag{15.1}$$

で与えられる量である．

m^* は集合を数に変換するものである．このような性質をもつものを集合関数という．

次のことは直感的には明らかであろう．

補題 15.6. R を直方体とするとき，$m^*(R) = |R|$ が成り立つ．

証明. 一般に，S を中心を保ったまま k 倍に相似拡大して得られる直方体を kS を書くことにする．

定義より，$m^*(R) \le |R|$ は明らかである．仮に，$m^*(R) < |R|$ と仮定すると，

$$\sum_{j=1}^{\infty} |R_j| < |R|,\ R \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j \tag{15.2}$$

を満たしている立方体の列 $\{R_j\}_{j=1}^{\infty}$ が取れる．すると，ある $\varepsilon \in (0,1)$ が存在して，

$$\sum_{j=1}^{\infty} |(1+\varepsilon)R_j| < |(1-\varepsilon)R| \tag{15.3}$$

である．$\overline{(1-\varepsilon)R}$ はコンパクトで，$\{\mathrm{Int}(1+\varepsilon)R_j\}_{j=1}^{\infty}$ はその開被覆であるから，ある N が存在して，

$$\overline{(1-\varepsilon)R} \subset \bigcup_{j=1}^{N} \mathrm{Int}((1+\varepsilon)R_j),\ \sum_{j=1}^{N} |(1+\varepsilon)R_j| < |(1-\varepsilon)R| \tag{15.4}$$

が成り立つ．$\{(1+\varepsilon)R_j\}_{j=1}^{\infty}$ が重なっているかもしれないことからもわかるようにこれは矛盾している． □

定義から次のことがわかる．

補題 15.7. 集合関数 m^* は σ-劣加法的，つまり $j = 1, 2, \cdots$ に対して部分集合 $A_j \subset \mathbb{R}^n$ が与えられた時に，$m^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \le \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j)$ が成り立つ．

証明. 背理法で証明しよう．結論を否定するとわかるように $\varepsilon > 0$ が存在して，

$$m^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) > \varepsilon + \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j) \tag{15.5}$$

となる．$m(A_j)$ の定義で，各 $j \in \mathbb{N}$ に対して，長方形の集まり (列) $\{R_{jk}\}_{k\in\mathbb{N}}$ で，

$$A_j \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} R_{jk},\ m^*(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j} \ge \sum_{k\in\mathbb{N}} |R_{jk}| \tag{15.6}$$

を満たすものが存在する．これらの長方形 $R_{j,k}$, $j, k \in \mathbb{N}$ を用いて

$$\varepsilon + \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j) < m^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \le \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} |R_{jk}|\right) \le \varepsilon + \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j), \tag{15.7}$$

が得られるが，(15.7) は矛盾である． □

直方体をいくつかに分割して考えればわかるように，R_1 と R_2 が共通部分を持たないならば，

$$m^*(R_1 \cup R_2) = m^*(R_1) + m^*(R_2) \tag{15.8}$$

が成り立つ．このような性質

$$E_1\text{と }E_2\text{が互いに交わらないとき},m^*(E_1 \cup E_2) = m^*(E_1) + m^*(E_2) \tag{15.9}$$

は別に E_1 と E_2 が別に直方体のときだけに限らず，円などのほかの図形でもよいはずである．ところが，このような性質や“ よい ”集合をどのように記述するのかに関して情報がない．アンリー

ルベーグ (Henri Lebesgue) はこの条件をもう少し広げて考えることが重要であると考えた．すなわち，

$$\{E_j\}_{j=1}^{\infty}\text{が互いに交わらないとき,}\qquad m^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j\right)=\sum_{j=1}^{\infty}m^*(E_j) \tag{15.10}$$

が成り立たないといけない．“ よい ”集合が持っていないといけない性質を定義することから始める．以後，このよいボレル (Borel) 集合を可測集合という．(ボレルは人名である．) 本書ではボレル集合を可測集合，ボレル可測集合などとも言うことにする．

定義 15.8. ボレル集合とは，以下の条件を満たす $\mathbb{R}^n$ の性質 $\mathcal{P}$ をすべて満たしているような集合である．

(1) $\mathbb{R}^n$ 自体は性質 $\mathcal{P}$ を満たしている．
(2) 長方形はすべて性質 $\mathcal{P}$ を満たしている．
(3) $\mathbb{R}^n$ の部分集合 A が性質 $\mathcal{P}$ を満たしていれば，その補集合 A^c も性質 $\mathcal{P}$ を満たしている．
(4) $\mathbb{R}^n$ の部分集合 A,B が性質 $\mathcal{P}$ を満たしていれば，それらの和集合 $A\cup B$ も性質 $\mathcal{P}$ を満たしている．
(5) $\mathbb{R}^n$ の互いに交わらない部分集合の列 $A_1,A_2,\cdots,A_j,\cdots$ が性質 $\mathcal{P}$ を満たしていれば，それらの和集合 $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j$ も性質 $\mathcal{P}$ を満たしている．

ここで，ポイントとなるのは性質 $\mathcal{P}$ が何かがわからないことである．ここでは，性質 $\mathcal{P}$ の例として,『$\mathcal{P}$ は $\mathbb{R}^n$ の部分集合である.』という性質が挙げられることを指摘しておくにとどめる．性質 $\mathcal{P}$ というのは一般にはわかりにくいかもしれないが，$\mathbb{R}^n$ の部分集合全体から，2 点集合 $\{T,F\}=\{\mathrm{true},\mathrm{false}\}$ への写像 $\mathcal{T}$ で，次の条件を満たしているものと考えてもよいであろう．

(1) $\mathcal{T}(\mathbb{R}^n)=T$.
(2) 直方体 R に対して，$\mathcal{T}(R)=T$.
(3) $A\subset\mathbb{R}^n$ が $\mathcal{T}(A)=T$ ならば，$\mathcal{T}(A^c)=T$ が成り立つ．
(4) $A,B\subset\mathbb{R}^n$ が $\mathcal{T}(A)=\mathcal{T}(B)=T$ ならば，$\mathcal{T}(A\cup B)=T$ が成り立つ．
(5) $A_1,A_2,\cdots$ を $\mathbb{R}^n$ の互いに交わらない部分集合の列として，$\mathcal{T}(A_j)=T$ が $j=1,2,\cdots$ に対して成り立つならば，$\mathcal{T}\left(\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j\right)=T$ が成り立つ．

定義から次のことは明らかである．

命題 15.9. $\mathbb{R}^n$ の性質 $\mathcal{P}$ が次の条件を満たしているとする．

(1) $\mathbb{R}^n$ 自体は性質 $\mathcal{P}$ を満たしている．
(2) 長方形はすべて性質 $\mathcal{P}$ を満たしている．
(3) $\mathbb{R}^n$ の部分集合 A が性質 $\mathcal{P}$ を満たしていれば，その補集合 A^c も性質 $\mathcal{P}$ を満たしている．
(4) $\mathbb{R}^n$ の部分集合 A,B が性質 $\mathcal{P}$ を満たしていれば，それらの和集合 $A\cup B$ も性質 $\mathcal{P}$ を満たしている．
(5) $\mathbb{R}^n$ の互いに交わらない部分集合の列 $A_1,A_2,\cdots,A_j,\cdots$ が性質 $\mathcal{P}$ を満たしていれば，それらの和集合 $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j$ も性質 $\mathcal{P}$ を満たしている．

このとき，ボレル集合は性質 $\mathcal{P}$ を満たしている．

命題 15.10.

(1) $\mathbb{R}^n$ はボレル可測である．
(2) A がボレル可測であるなら，A^c もボレル可測である．
(3) A, B がボレル可測であるなら，$A \cup B$ もボレル可測である．
(4) $\mathbb{R}^n$ の互いに交わらない部分集合の列 $A_1, A_2, \cdots, A_j, \cdots$ がボレル可測であるなら，$\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ もボレル可測である．

証明. $\mathbb{R}^n$ がボレル可測であることの証明をしよう．他の証明も同じである．命題 15.9 にあるような性質 $\mathcal{P}$ があったとする．すると，$\mathbb{R}^n$ は性質 $\mathcal{P}$ を満たしているから，ボレル集合の定義によって，$\mathbb{R}^n$ はボレル可測である． $\square$

ボレル可測性に関してもう少し調べておこう．

命題 15.11.

(1) $\emptyset$ はボレル可測集合である．
(2) A, B がボレル可測であるなら，$A \cup B$ もボレル可測である．
(3) $\mathbb{R}^n$ の互いに交わらない部分集合の列 $A_1, A_2, \cdots, A_j, \cdots$ がボレル可測であるなら，$\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ もボレル可測である．
(4) 開集合，閉集合はボレル可測である．

証明.

(1) $\emptyset = (\mathbb{R}^n)^c$ より明らかである．
(2) $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$ より明らかである．
(3) $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \cap ({A_{j-1}}^c \cap \cdots {A_1}^c)$ より明らかである．
(4) U を開集合とする．$x \in U$ とすると，x を含む長方形が存在する．長方形の端点の座標はすべて有理数であるとしてよい．したがって，U は可算個の長方形の合併として書かれる．よって，(3) より U はボレル可測である．閉集合の補集合は開集合であるから，閉集合はボレル可測である．

$\square$

以後，ボレル可測集合 A に対して，$m^*(A) = m(A)$ と $*$ を外して書くことにする．さらに，ボレル可測集合 A に対して，$m^*(A) = |A|$ と書くこともある．

命題 15.12. 全てのボレル集合 A, B に対して，$m(A) = m(A \cap B) + m(A \cap B^c)$ が成り立つ．

証明. $\mathbb{R}^n$ の部分集合 B が『性質 $\mathcal{P}$ を満たしている』ということをすべてのボレル可測集合 A に対して，$m(A) = m(A \cap B) + m(A \cap B^c)$ が成り立つと定義する．このとき，この性質 $\mathcal{P}$ が命題 15.9 にある条件を満たす．

長方形の補集合も可算個の長方形の互いに交わらない和として表されるから，長方形はみな性質 $\mathcal{P}$ を満たしている．$m(\emptyset) = 0$ であるから，$\mathbb{R}^n$ は $\mathcal{P}$ を満たしている．さらに，性質 $\mathcal{P}$ の定義から，B が性質 $\mathcal{P}$ を満たすことと B^c が性質 $\mathcal{P}$ を満たすことは同値であるのは明らかである．

性質 $\mathcal{P}$ を満たす B_1, B_2 に対して，$B_1 \cup B_2$ も性質 $\mathcal{P}$ を満たすことを示そう．定義に従って，

$$
\begin{aligned}
&m(A \cap (B_1 \cup B_2)) + m(A \cap (B_1 \cup B_2)^c) \\
&= m((A \cap B_1) \cup (A \cap B_2 \cap {B_1}^c)) + m(A \cap (B_1 \cup B_2)^c) \quad (15.11)\\
&\le m(A \cap B_1) + m(A \cap B_2 \cap {B_1}^c) + m(A \cap {B_1}^c \cap {B_2}^c) \quad (15.12)\\
&\le m(A \cap B_1) + m(A \cap {B_1}^c) = m(A) \le m(A \cap (B_1 \cup B_2)) + m(A \cap (B_1 \cup B_2)^c) \quad (15.13)
\end{aligned}
$$

となる．ここで，次のことを用いている．

(1) (15.11) の導出には $A \cap (B_1 \cup B_2) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2 \cap {B_1}^c)$ を用いた．
(2) (15.12) は補題 15.7 より従う．
(3) (15.13) の左側の不等式 は $A \cap {B_1}^c$ と B_2 は性質 $\mathcal{P}$ を満たすことよりわかる．等号 (15.13) は A と B_1 はボレル集合であることより従う．(15.13) の右側の不等式は補題 15.7 より従う．

結果として，$B_1 \cup B_2$ も性質 $\mathcal{P}$ を満たすことが示された．B が性質 $\mathcal{P}$ を満たすならば，B^c が性質 $\mathcal{P}$ を満たすので，ボレル集合 $B_1 \cup B_2 = ({B_1}^c \cap {B_2}^c)^c$ も性質 $\mathcal{P}$ を満たす．

もし，性質 $\mathcal{P}$ を満たしている $\{B_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ が互いに交わらないならば，$\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ は性質 $\mathcal{P}$ を満たすことを示そう．少なくとも $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_N$ は性質 $\mathcal{P}$ を満たすから，

$$
m\left(A \cap \bigcup_{j=1}^{N} B_j\right) = \sum_{j=1}^{N} m(A \cap B_j) \tag{15.14}
$$

となる．よって，

$$
\sum_{j=1}^{\infty} m(A \cap B_j) = \lim_{N \to \infty} \sum_{j=1}^{N} m(A \cap B_j) = \lim_{N \to \infty} m\left(\bigcup_{j=1}^{N} A \cap B_j\right) \le m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A \cap B_j\right) \tag{15.15}
$$

が得られる．ここで，再び補題 15.7 より，逆側の不等式が得られる．以上より，

$$
\sum_{j=1}^{\infty} m(A \cap B_j) = m\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right)\right). \tag{15.16}
$$

となる．ここで，$C = \left(\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right)^c$ とすると，(15.16) より，

$$
m(A) \le m(A \cap C) + m\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right)\right) = m(A \cap C) + \sum_{j=1}^{\infty} m(A \cap B_j) \tag{15.17}
$$

となる．ここで，$\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} m(A \cap B_j) = \lim_{N \to \infty} \sum_{j=1}^{N} m(A \cap B_j)$, だから，補題 15.7 によって

$$
\begin{aligned}
m(A) &= m(A \cap C) + \lim_{N \to \infty} \sum_{j=1}^{N} m(A \cap B_j) \\
&\le \lim_{N \to \infty} m\left(\left\{A \cap \bigcup_{j=1}^{N} B_j\right\} \cup \left\{A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right)^c\right\}\right) \quad (15.18)
\end{aligned}
$$

となる．最右辺は明らかに $m(A)$ 以下である．よって，(15.18) における $\leq$ は実際には等号である．したがって，$\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ は性質 $\mathcal{P}$ を満たす．命題 15.9 よりボレル集合はみな $\mathcal{P}$ を満たす． □

定理 15.13 (σ-加法性)**.** 集合関数 m は σ-加法的である．つまり，$\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ が互いに交わらないボレル集合の列ならば，

$$\sum_{j=1}^{\infty} m(E_j) = m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \tag{15.19}$$

となる．

証明. ボレル集合はみな $\mathcal{P}$ を満たすので，(15.16) で $A=\mathbb{R}^n$, $B_j=E_j$, $j\in\mathbb{N}$ とすればよい． □

ルベーグ測度の重要な性質をまとめておこう．

系 15.14. $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ がボレル集合の (包含関係に関しての) 増大列であるならば,

$$\lim_{j\to\infty} m(B_j) = m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) \tag{15.20}$$

となる．

証明. $j\in\mathbb{N}$ に対して，$C_j = \begin{cases} B_1 & (j=1) \\ B_j \setminus B_{j-1} & (j\geq 2) \end{cases}$ とおくと，B_j の分割 $\{C_k\}_{k=1}^{j}$ が得られる．よって,

$$\lim_{j\to\infty} m(B_j) = \lim_{j\to\infty} m(C_1\cup C_2\cup\cdots\cup C_j) = \lim_{j\to\infty}\sum_{k=1}^{j} m(C_k) \tag{15.21}$$

となる．m の σ-加法性と集合の等式 $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ によって

$$\lim_{j\to\infty} m(B_j) = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k\right) = m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right). \tag{15.22}$$

となる． □

系 15.15. ボレル集合列 $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ がもし

$$m(A_1)<\infty,\ A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_j\supset\cdots \tag{15.23}$$

を満たすならば，$\displaystyle\lim_{j\to\infty} m(A_j) = m\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right)$ となる．

各 $j\in\mathbb{N}$ に対して，$A_j=(j,\infty)$ とすればわかるように，(15.23) における条件 $m(A_1)<\infty$ は外せない．

証明. $m(A_1)<\infty$ だから,

$$m(A_1) - m\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = m\left(A_1\setminus\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) \tag{15.24}$$

となる．よって，$D_j = A_1 \setminus A_j$ とおけば，仮定と系 15.14 より，

$$m(A_1) - m\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} D_j\right) = \lim_{j\to\infty} m(D_j) = m(A_1) - \lim_{j\to\infty} m(A_j) \tag{15.25}$$

となる．移項すると結論が得られる． □

15.2. **可測関数.** ここでは積分を定義できるような関数を考察する．

定義 15.16 (ボレル可測関数，ボレル単純関数)**.** E をボレル可測集合とする．

(1) χ_A は集合 A の特性関数を表す．つまり，$x \in A$ ならば，$\chi_A(x) = 1$ で，$x \notin A$ ならば，$\chi_A(x) = 0$ とする．
(2) 関数 $f : E \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ がボレル可測であるとは，すべての $\lambda > 0$ に対して，
$$\{f > \lambda\} = f^{-1}((\lambda, \infty)) = \{x \in E \,:\, f(x) > \lambda\} \tag{15.26}$$
がボレル可測集合となることである．
(3) $a_1, a_2, \cdots, a_N \in \mathbb{R}$ と互いに交わらない測度有限なボレル可測集合の有限列 $\{E_j\}_{j=1}^N$ を用いて $f = \displaystyle\sum_{j=1}^N a_j\, \chi_{E_j}$ と表せる関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ をボレル単純関数という．このような表し方を (ここでは)f の許容表現という．

ボレルという言葉は関数と集合に対して用いる．ボレル関数の性質に関してまとめておこう．

補題 15.17. ボレル可測集合 E から $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ への関数について，次の性質が成り立つ．

(1) f を可測とするとき，$\{f < \lambda\} = f^{-1}(-\infty, \lambda)$ はボレル可測集合である．
(2) 連続関数はボレル可測である．
(3) f, g をボレル可測関数列とするとき，$f + g, fg$ はボレル可測である．
(4) $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ をボレル可測関数列とするとき，$\displaystyle\sup_{n\in\mathbb{N}} f_j$ はボレル可測である．

証明.

(1) $(-\infty, \lambda) = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty, \lambda - n^{-1}]$ だから，$\{f < \lambda\} = f^{-1}\{(-\infty, \lambda)\} = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \{f \le \lambda - n^{-1}\} = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \{f > \lambda - n^{-1}\}^c$ である．最後の表示を見ればわかるように，$\{f < \lambda\}$ はボレル可測である．
(2) f を連続関数とすると，$\{f > \lambda\}$ は開集合であるから，ボレル可測集合である．
(3) $\lambda \in \mathbb{R}$ とすると，$\{f + g > \lambda\} = \displaystyle\bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \{f > q\} \cap \{g > \lambda - q\}$ が成り立つ．よって，$f + g$ は可測である．
　また，h を可測とするとき，$\{h^2 > \lambda\} = \begin{cases} \{h > \sqrt{\lambda}\} \cup \{h < -\sqrt{\lambda}\} & (\lambda \ge 0) \\ \mathbb{R} & (\lambda < 0) \end{cases}$ だから，h^2 も可測である．このことを踏まえて，$fg = \dfrac{1}{2}(f+g)^2 - \dfrac{1}{2}f^2 - \dfrac{1}{2}g^2$ だから，fg のボレル可測性が得られる．
(4) $\left\{\displaystyle\sup_{n\in\mathbb{N}} f_j > \lambda\right\} = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \{f_j > \lambda\}$ より明らかである．

□

$[0,\infty]$ とは ∞ と $[0,\infty)$ の和集合として定義する．$[-\infty,\infty]$ も類似の定義を与える．

定理 15.18. $[0,\infty]$ に値をとるボレル可測関数はボレル単純関数の $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ の単調増大極限として表される．

証明. f_j をガウス記号 $[\cdot]$ を用いて

$$f_j(x) = \chi_{\{|x|\le j\}}(x)2^{-j}[2^j \min(j, f(x))] \ (j \in \mathbb{N}) \tag{15.27}$$

と定義すればよいだけのことである． □

16. 積分の定義と基本定理

断りがない限り E を可測集合とする．

16.1. **積分の定義.** 正値ボレル可測関数の積分を定義しよう．区間上の積分より一般に集合 D 上の積分を考える．

定義 16.1 (単純関数の積分)**.** $f : E \to [0,\infty)$ を正値単純関数とする．$a_1, a_2, \cdots, a_N \in \mathbb{R}$ と (共通部分を持っていてはならない) $E_1, E_2, \cdots, E_N \in \mathcal{B}$ を用いて $f = \displaystyle\sum_{j=1}^N a_j\,\chi_{E_j}$ と表されるとき，$\displaystyle\int_E f(x)\,dx = \sum_{j=1}^N a_j\,|E \cap E_j|$ と定める．

この定義には必然性がある．1 を積分すると体積が現れるから，E, F をボレル集合とするとき，

$$\int_E \chi_F(x)\,dx = |E \cap F| \tag{16.1}$$

が成り立たないといけない．積分の線形性

$$\int_E (a\,f(x) + b\,g(x))\;dx = a\int_E f(x)\,dx + b\int_E g(x)\,dx \tag{16.2}$$

が成り立つと仮定すると，

$$\int_E f(x)\,dx = \sum_{j=1}^N a_j \int_{E_j} \chi_E(x)\,dx = \sum_{j=1}^N a_j\,|E \cap E_j| \tag{16.3}$$

命題 16.2. 正値単純関数 $f : E \to [0,\infty)$ の積分 $\displaystyle\int_E f(x)\,dx$ の定義は許容表現のとり方によらない．

証明. 正値単純関数 f の二つの許容表現

$$f = \sum_{j=1}^N a_j\,\chi_{E_j} = \sum_{k=1}^M b_k\,\chi_{F_k} \tag{16.4}$$

が与えられたとする．すると，$f = \displaystyle\sum_{j=1}^N\sum_{k=1}^M a_j\,\chi_{E_j\cap F_k} = \sum_{j=1}^N\sum_{k=1}^M b_k\,\chi_{E_j\cap F_k}$ となる．$E_j \cap F_k$ が空でないとする．$p_{jk} \in E_j \cap F_k$ のとき，$a_j = b_k = f(p_{jk})$ である．よって，

$$\sum_{j=1}^N a_j\,|E\cap E_j| = \sum_{j=1}^N\sum_{k=1}^M a_j\,|E\cap E_j\cap F_k| = \sum_{j=1}^N\sum_{k=1}^M b_k\,|E\cap E_j\cap F_k| = \sum_{k=1}^N b_k\,|E\cap F_k| \tag{16.5}$$

となるので，証明が完成した． □

正値関数とは，$[0,\infty]$ に値をとる関数のことである．

定義 16.3 (正値関数の積分)．$f:E\to[0,\infty]$ が正値ボレル可測関数のとき，

$$\int_E f(x)\,dx := \sup\left\{\int_E g(x)\,dx \,:\, g \text{ は単純関数で，すべての } x\in E \text{ に対して } g(x)\le f(x)\right\}\ge 0$$

と定める．

定義より次は明らかである．

命題 16.4. $a\ge 0$ で，$f:E\to[0,\infty]$ が正値ボレル可測関数のとき，$\displaystyle\int_E a\,f(x)\,dx = a\int_E f(x)\,dx$ となる．

次の補題によって，積分のいろいろな性質が保証される．

補題 16.5. $g:E\to[0,\infty)$ が正値単純関数で，$\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ がすべての $x\in E$ に対して $\displaystyle\lim_{j\to\infty} f_j(x)\ge g(x)$ を満たす正値ボレル可測関数の増大列のとき，

$$\int_E g(x)\,dx = \lim_{j\to\infty}\int_E \min(g(x),f_j(x))\,dx. \tag{16.6}$$

証明. 積分の加法性，つまり F_1,F_2 が互いに交わらないボレル集合のとき，正値ボレル可測関数 f に対して，$\displaystyle\int_{F_1\cup F_2} f(x)\,dx = \int_{F_1} f(x)\,dx + \int_{F_2} f(x)\,dx$ が成り立つことから，g は 0 と a 二つの値しかとらないと仮定しても一般性を失わない．よって，有限測度の可測集合 E と $a>0$ に対して，$\displaystyle a|E| = \lim_{j\to\infty}\int_E \min(a\,\chi_E(x),f_j(x))\,dx$ を示せばよい．

$\varepsilon>0$ を固定して，$E_j := \{f_j > a-\varepsilon\}\cap E$ とする．$E_1\subset E_2\subset\cdots\to E$ だから，系 15.14 が使えて，$\displaystyle\int_E (a-\varepsilon)\chi_{E_j}(x)\,dx = (a-\varepsilon)|E_j|$, とあわせると，

$$a|E| \ge \lim_{j\to\infty}\int_E \min(a\,\chi_E(x),f_j(x))\,dx \ge \lim_{j\to\infty}\int_E (a-\varepsilon)\chi_{E_j}(x)\,dx = (a-\varepsilon)|E| \tag{16.7}$$

となる．$\varepsilon>0$ は任意だから，

$$a|E| = \lim_{j\to\infty}\int_E \min(a\,\chi_E(x),f_j(x))\,dx. \tag{16.8}$$

よって，(16.6) が証明された．$\square$

ここで，積分の基本定理を示す．

定理 16.6 (単調収束定理)．$\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ は正値ボレル可測関数の増大列とする．$\displaystyle\lim_{j\to\infty} f_j(x) = f(x)$, $x\in E$ で関数 f を定めると

$$\lim_{j\to\infty}\int_E f_j(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx \tag{16.9}$$

が成り立つ．

証明. $f_j\le f$, $j\in\mathbb{N}$ だから，$\displaystyle\lim_{j\to\infty}\int_E f_j(x)\,dx \le \int_E f(x)\,dx$, は明らかである．逆向きの不等式を示そう．そのためには単純関数 g を $g\le f$ となるようにとれば，補題 16.5 によって，

$$\int_E g(x)\,dx = \lim_{j\to\infty}\int_E \min(g(x),f_j(x))\,dx \le \lim_{j\to\infty}\int_E f_j(x)\,dx \tag{16.10}$$

となる．単純関数 g は任意だったから，(16.9) が証明できた．$\square$

命題 16.7 (積分の線形性). f, g が正値ボレル可測関数ならば,

$$\int_E (f(x)+g(x))\,dx = \int_E f(x)\,dx + \int_E g(x)\,dx \tag{16.11}$$

となる.

証明. 定理 15.18 より，単純関数の増大列 $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ と $\{g_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ で f と g に収束するものが取れる．定理 16.6 より,

$$\int_E (f(x)+g(x))\,dx = \lim_{j\to\infty}\int_E (f(x)+g(x))\,dx, \tag{16.12}$$

$$\int_E f(x)\,dx = \lim_{j\to\infty}\int_E f_j(x)\,dx,\ \int_E g(x)\,dx = \lim_{j\to\infty}\int_E g_j(x)\,dx. \tag{16.13}$$

各 f_j，g_j は単純関数だから，定義 16.3 より (16.11) は明らかである．よって，これらの考察より，一般の f, g に対しても (16.11) が得られる． □

ボレル可測関数に対する積分を定義する前に，ファトゥの補題を証明しておこう．実数列 $\{a_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ の下極限 $\liminf_{j\to\infty}$ とは $\liminf_{j\to\infty} a_j := \lim_{k\to\infty}\left(\inf_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ j\geq k}} a_j\right)$ で与えられていたことを思い出そう．

定理 16.8 (ファトゥの補題). 正値ボレル可測関数 $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ に対して,

$$\int_E \liminf_{j\to\infty} f_j(x)\,dx \leq \liminf_{j\to\infty}\int_E f_j(x)\,dx \tag{16.14}$$

が成り立つ.

証明. 定理 16.6 と $\left\{\inf_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ j\geq k}} f_j\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ が正値増大関数列であることによって,

(16.15)

$$\int_E \liminf_{j\to\infty} f_j(x)\,dx = \lim_{k\to\infty}\int_E \inf_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ j\geq k}} f_j(x)\,dx = \liminf_{k\to\infty}\int_E \inf_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ j\geq k}} f_j(x)\,dx \leq \liminf_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\,dx.$$

よって，定理は証明された． □

16.2. **一般の関数に対する積分の定義.** 一般のボレル可測関数 $f: E\to[-\infty,\infty]$ に対して積分を定義していこう.

定義 16.9 (f の $\pm$-部分と可積分性). 一般に関数 $f: E\to[-\infty,\infty]$ に対して，$f^+ := \max(f,0)$ と $f^- := \min(f,0)$ とおく．ボレル可測関数 $f: E\to[-\infty,\infty]$ が可積分であるとは，$f^+, -f^-$ の両方が積分が有限であることをいう．$f: E\to[-\infty,\infty]$ が可積分のとき,

$$\int_E f(x)\,dx = \int_E f^+(x)\,dx - \int_E (-f^-(x))\,dx \tag{16.16}$$

と定める.

$$\max(a,b) = \frac{a+b+|a-b|}{2},\ \min(a,b) = \frac{a+b-|a-b|}{2} \tag{16.17}$$

が成り立つことに注意しよう.

次の補題は簡単なことであるが，可積分性の判定に役立つ.

補題 16.10 (可積分性の判定)**.** ボレル可測関数 $f : E \to [-\infty, \infty]$ が可積分であることと $|f|$ が可積分であることは同値である.

証明. これは命題 16.7 によって

$$\int_E |f(x)|\,dx = \int_E (f^+(x) + f^-(x))\,dx = \int_E f^+(x)\,dx + \int_E f^-(x)\,dx \tag{16.18}$$

だから，明らかである. □

命題 16.11. E 上の実数値可積分関数全体は $\mathbb{R}$-線形空間の構造を持つ.

証明. 掛け算は足し算より証明が簡単であるから，足し算の演算が保存されることの証明に焦点を置こう. $f, g : E \to \mathbb{R}$ を可積分関数とすると，

$$\int_E |f(x) + g(x)|\,dx \le \int_E (|f(x)| + |g(x)|)\ dx \le \int_E |f(x)|\,dx + \int_E |g(x)|\,dx < \infty, \tag{16.19}$$

だから，$f + g$ は可積分である．さらに，命題 16.7 より，

$$\begin{aligned}
&\int_E \frac{|f(x)| + |g(x)| \pm (f(x) + g(x))}{2}\,dx \\
&= \int_E \frac{|f(x) + g(x)| \pm (f(x) + g(x))}{2}\,dx + \int_E \frac{|f(x)| + |g(x)| - |f(x) + g(x)|}{2}\,dx.
\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}
&\int_E (f(x) + g(x))\,dx \\
&= \int_E \frac{|f(x) + g(x)| + f(x) + g(x)}{2}\,dx - \int_E \frac{|f(x) + g(x)| - f(x) - g(x)}{2}\,dx \\
&= \int_E \left\{ \frac{|f(x)| + |g(x)| + f(x) + g(x)}{2} - \frac{|f(x)| + |g(x)| - |f(x) + g(x)|}{2} \right\} dx \\
&\quad - \int_E \left\{ \frac{|f(x)| + |g(x)| - f(x) - g(x)}{2} - \frac{|f(x)| + |g(x)| - |f(x) + g(x)|}{2} \right\} dx.
\end{aligned}$$

ここで f, g は両方とも可積分だから，

$$\begin{aligned}
&\int_E (f(x) + g(x))\,dx \\
&= \int_E \frac{|f(x)| + |g(x)| + f(x) + g(x)}{2}\,dx - \int_E \frac{|f(x)| + |g(x)| - f(x) - g(x)}{2}\,dx \\
&= \int_E \frac{|f(x)| + f(x)}{2}\,dx + \int_E \frac{|g(x)| + g(x)}{2}\,dx - \int_E \frac{|f(x)| - f(x)}{2}\,dx - \int_E \frac{|g(x)| - g(x)}{2}\,dx \\
&= \int_E \frac{|f(x)| + f(x)}{2}\,dx - \int_E \frac{|f(x)| - f(x)}{2}\,dx + \int_E \frac{|g(x)| + g(x)}{2}\,dx - \int_E \frac{|g(x)| - g(x)}{2}\,dx \\
&= \int_E f(x)\,dx + \int_E g(x)\,dx.
\end{aligned}$$

よって積分の線形性が証明された. □

それでは，ここで重要なルベーグの収束定理を示そう.

定理 16.12 (ルベーグの収束定理)**.** $f_1, f_2, \cdots : E \to [-\infty, \infty]$ を f に各点収束するようなボレル可測関数列とする．可積分関数 $g : E \to [-\infty, \infty]$ が存在して，すべての $j \in \mathbb{N}$ と $x \in \mathbb{R}$ に対して $|f_j(x)| \le g(x)$ を満たしていれば

$$\lim_{j\to\infty} \int_E f_j(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx \tag{16.20}$$

となる．

証明. $g \pm f_j \ge 0$ であるから，ファトゥの補題により，

$$\begin{aligned}
\int_E (g(x) + f(x))\,dx &\le \int_E g(x)\,dx + \liminf_{j\to\infty} \int_E f_j(x)\,dx \\
\int_E (g(x) - f(x))\,dx &\le \int_E g(x)\,dx + \liminf_{j\to\infty} \int_E (-f_j(x))\,dx \\
&= \int_E g(x)\,dx - \limsup_{j\to\infty} \int_E f_j(x)\,dx
\end{aligned}$$

となる．ここで，各項は仮定によって有限であるから，

$$\limsup_{j\to\infty} \int_E f_j(x)\,dx \le \int_E f(x)\,dx \le \liminf_{j\to\infty} \int_E f_j(x)\,dx \le \limsup_{j\to\infty} \int_E f_j(x)\,dx \tag{16.21}$$

となり，証明が完成する． □

この定理は次の形で使われる．

系 16.13. $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ は $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \int_E |f_j(x)|\,dx < \infty$ を満たしている可積分関数列とするとき，

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_E f_j(x)\,dx = \int_E \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)\,dx \tag{16.22}$$

が成り立つ．

証明. 単調収束定理 (定理 16.6) より，$\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \int |f_j(x)|\,dx = \int \sum_{j=1}^{\infty} |f_j(x)|\,dx < \infty$ だから，ルベーグの収束定理 (定理 16.12) を $\{F_j\}_{j\in\mathbb{N}} = \left\{\displaystyle\sum_{k=1}^{j} f_k\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ と $G = \displaystyle\sum_{j\in\mathbb{N}} |f_j|$ に適用すればよい． □

ルベーグの収束定理は次の形でもよく使われる．

定理 16.14. $F : (a,b) \times \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$ は次の条件を満たしている関数とする．(1) $x \in \mathbb{R}$ を止めるごとに $F(\cdot, x)$ は連続関数となる．(2) 可積分関数 $g : E \to [-\infty, \infty]$ が存在して，$|F(t, \cdot)| \le g$ となる．このとき，

$$\lim_{t\to t_0} \int_E F(t,x)\,dx = \int_E F(t_0,x)\,dx,\ t_0 \in (a,b). \tag{16.23}$$

証明. 点列の言葉で主張を言い換えれば，t_0 に収束する点列 $\{t_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset (a,b)$ に対して，

$$\lim_{j\to\infty} \int_E F(t_j,x)\,dx = \int_E F(t_0,x)\,dx \tag{16.24}$$

を示せばよいことになるが，これはちょうどルベーグの収束定理を $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}} = \{F(t_j, \cdot)\}_{j\in\mathbb{N}}$ に適用しただけのことである． □

定理 16.15. $F:(a,b)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は次の条件を満たしている関数とする．(1) すべての $t\in(a,b)$ と $x\in\mathbb{R}$ に対して $\partial_t F(t,x)$ が存在する．(2) $F(t,\cdot)$ は可積分である．(3) 可積分関数 $g:E\to\mathbb{R}$ が存在して，$|\partial_t F(t,x)|\le g(x)$, $x\in\mathbb{R}$ となる．このとき，

$$\frac{d}{dt}\int_E F(t,x)\,dx=\int_E \partial_t F(t,x)\,dx. \tag{16.25}$$

証明. $t_0\in(a,b)$ を止めて，関数

$$G(t,x):=\int_0^1 \partial_t F(t_0+(t-t_0)u,x)\,du,\ t\in(a,b),\ x\in E \tag{16.26}$$

を考える．ここで，微分積分学の基本定理によって

$$G(t,x)=\frac{F(t,x)-F(t_0,x)}{t-t_0},\ t\neq t_0 \tag{16.27}$$

となる．よって，定理 16.14 を G に対して適用すれば結論が得られる． □

可測性，可積分性などの概念は複素数値関数に対しても適用される．実部と虚部に分けてそれぞれに種々の概念を適用していけばよいのである．ただし，複素数に $(\pm)\infty$ はないので，実部と虚部は両方とも $\pm\infty$ をとることを認めない．ルベーグの収束定理の複素数値版も記述，証明できる．

16.3. **積分不等式.**

命題 16.16. $f,g:E\to[-\infty,\infty]$ が可積分関数で $f\le g$ のとき，$\displaystyle\int_E f(x)\,dx\le\int_E g(x)\,dx$, が成り立つ．

証明. これは正値可積分関数の性質と線形性より明らかである． □

この不等式を用いていろいろな不等式を示すことができる．

命題 16.17. $f:E\to\mathbb{C}$ を可積分関数とするとき，$\displaystyle\left|\int_E f(x)\,dx\right|\le\int_E |f(x)|\,dx.$

証明. 複素数 $\alpha\in\mathbb{C}$ に対して $|\alpha|=\sup\limits_{\theta\in\mathbb{R}}\mathrm{Re}(e^{i\theta}\alpha)$ だから，

$$\left|\int_E f(x)\,dx\right|\le\sup_{\theta\in\mathbb{R}}\mathrm{Re}\left[\exp(i\theta)\int_E f(x)\,dx\right]=\sup_{\theta\in\mathbb{R}}\int_E \mathrm{Re}\left[\exp(i\theta)f(x)\right]\,dx\le\int_E |f(x)|\,dx. \tag{16.28}$$

ここで，最後の不等式に命題 16.16 を用いた． □

命題 16.18 (チェビシェフ (Chebyshev) の不等式)**.** f をボレル可測関数で $\lambda>0$ とする．このとき，

$$|\{|f|>\lambda\}|\le\frac{1}{\lambda}\int_E |f(x)|\,dx \tag{16.29}$$

が成り立つ．

証明. 命題 16.16 と不等式 $\chi_{\{|f|>\lambda\}}\le\dfrac{|f|}{\lambda}$ を組み合わせよ． □

次の系は可積分関数はあまり絶対値が大きくならないことを主張している．

系 16.19. 可積分関数 $f:E\to\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ に対して $|\{|f|=\infty\}|=0$ が成り立つ．

証明. $\lambda > 0$ に対して，$\{|f| = \infty\} \subset \{|f| > \lambda\}$ だから，

$$|\{|f| = \infty\}| \le |\{|f| > \lambda\}| \le \frac{1}{\lambda}\int_E |f(x)|\,dx. \tag{16.30}$$

$\lambda > 0$ は任意で $\displaystyle\int_E |f(x)|\,dx < \infty$ であることにより，$|\{|f| = \infty\}| = 0$ となる． □

16.4. **フビニの定理.** ここでは，$m, n \in \mathbb{N}$ として，積分の順番を交換することができることを主張するフビニの定理を証明する．

補題 16.20. すべてのボレル集合 $A \subset \mathbb{R}^{n+m}$ に対して，$\chi_{A\cap R}(x,\cdot)$ が可測で，関数

$$x \in \mathbb{R}^n \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} \chi_A(x,y)\,dy \tag{16.31}$$

か可測で，

$$\int_{\mathbb{R}^{m+n}} \chi_A(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^m} \chi_A(x,y)\,dy\right)dx \tag{16.32}$$

が成り立つ．

証明. 単調収束定理によって，すべての直方体 R とボレル集合 A に対して，$\chi_{A\cap R}(x,\cdot)$ が可測で，関数

$$x \in \mathbb{R}^n \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} \chi_{A\cap R}(x,y)\,dy \tag{16.33}$$

か可測で，

$$\int_{\mathbb{R}^{m+n}} \chi_{A\cap R}(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^m} \chi_{A\cap R}(x,y)\,dy\right)dx \tag{16.34}$$

が成り立つことを示せばよい．

次の条件を満たす性質 $\mathcal{P}^*$ をすべて満たしている $\mathbb{R}^n$ の部分集合全体を考える．

(a) A, B が $\mathcal{P}^*$ を満たして，$A \subset B$ ならば，$B \setminus A$ は $\mathcal{P}^*$ を満たす．
(b) $A_1, A_2, \cdots, A_j, \cdots$ が $\mathcal{P}^*$ を満たして，さらに $A_1, A_2, \cdots, A_j, \cdots$ が互いに交わらないなら，$\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ は $\mathcal{P}^*$ を満たす．
(c) 長方形は $\mathcal{P}^*$ を満たす．

ボレル集合であるという条件は $\mathcal{P}^*$ のみたすべき条件 (a) と (b) と (c) を満たしているので，今考えている条件 (a) と (b) と (c) を満たす集合はボレル集合の一部ということになる．

例えば，今考えているような条件は $\mathcal{P}^*$ の一例である．そこで，A, B が (a) と (b) と (c) を満たしている性質 $\mathcal{P}^*$ すべてを満たしているとしよう．このとき，$A \cap B$ も $\mathcal{P}^*$ を満たしていることを示せれば，$\mathcal{P}^*$ をすべて満たしている $\mathbb{R}^n$ の部分集合は結局ボレル集合ということになる．

A, B が (a) と (b) と (c) を満たしている性質 $\mathcal{P}^*$ すべてを満たしているとして，$A \cap B$ も $\mathcal{P}^*$ を満たすことが目的なのであるが，特別な場合として A が長方形である時を考えよう．

$\mathcal{P}^*$ という性質が与えられたとして，次のような性質 $\mathcal{P}^*_A$ を考える．

B が $\mathcal{P}^*_A$ を満たすとは，$A \cap B$ が $\mathcal{P}^*$ を満たすことである．

すると，

(a') B_1, B_2 が $\mathcal{P}^*_A$ を満たしていて，$B_1 \subset B_2$ ならば，$B_2 \setminus B_1$ も $\mathcal{P}^*_A$ を満たしている．実際，$B_1 \cap A$, $B_2 \cap A$ が $\mathcal{P}^*$ を満たしているから，$(B_2 \setminus B_1) \cap A = (B_2 \cap A) \setminus (B_1 \cap A)$ も $\mathcal{P}^*$ を満たす．よって，$B_2 \setminus B_1$ は $\mathcal{P}^*_A$ を満たしている．

(b') $B_1, B_2, \cdots$ が $\mathcal{P}^*_A$ を満たしていて，これらが互いに交わらないなら，$\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ も $\mathcal{P}^*_A$ を満たしている．実際，$B_1, B_2, \cdots$ が $\mathcal{P}^*_A$ を満たしているから，$A \cap B_j$ は $\mathcal{P}^*$ を満たしていて，したがって，$A \cap \displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A \cap B_j$ は $\mathcal{P}^*$ を満たしている．これは，$\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ が $\mathcal{P}^*_A$ を満たしていることを意味している．

(c') 直方体は $\mathcal{P}^*_A$ を満たしている．実際，A が直方体であるから，B を直方体とすると，$A \cap B$ は直方体である．したがって，$A \cap B$ は $\mathcal{P}^*_A$ を，B は $\mathcal{P}^*$ を満たしていることになる．

このことによって，$\mathcal{P}^*_A$ は条件 (a) と (b) と (c) を満たしていることが分かったので，A が直方体の場合には $A \cap B$ は条件 (a) と (b) と (c) を満たしている $\mathcal{P}^*$ をすべて満たしていることが分かった．

一般に，A, B が (a) と (b) と (c) を満たしている性質 $\mathcal{P}^*$ すべてを満たしているとして，$A \cap B$ も $\mathcal{P}^*$ を満たすことを示そう．$\mathcal{P}^*$ という性質が与えられたとして，次のような性質 $\mathcal{P}^*_A$ を考える．

B が $\mathcal{P}^*_A$ を満たすとは，$A \cap B$ が $\mathcal{P}^*$ を満たすことである．

すると，

(a") B_1, B_2 が $\mathcal{P}^*_A$ を満たしていて，$B_1 \subset B_2$ ならば，$B_2 \setminus B_1$ も $\mathcal{P}^*_A$ を満たしている．実際，$B_1 \cap A$, $B_2 \cap A$ が $\mathcal{P}^*$ を満たしているから，$(B_2 \setminus B_1) \cap A = (B_2 \cap A) \setminus (B_1 \cap A)$ も $\mathcal{P}^*$ を満たす．よって，$B_2 \setminus B_1$ は $\mathcal{P}^*_A$ を満たしている．

(b") $B_1, B_2, \cdots$ が $\mathcal{P}^*_A$ を満たしていて，これらが互いに交わらないなら，$\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ も $\mathcal{P}^*_A$ を満たしている．実際，$B_1, B_2, \cdots$ が $\mathcal{P}^*_A$ を満たしているから，$A \cap B_j$ は $\mathcal{P}^*$ を満たしていて，したがって，$A \cap \displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A \cap B_j$ は $\mathcal{P}^*$ を満たしている．これは，$\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ が $\mathcal{P}^*_A$ を満たしていることを意味している．

(c") これは前の段落で示したことである．

したがって，$A \cap B$ は条件 (a) と (b) と (c) を満たしている $\mathcal{P}^*$ をすべて満たしている．

よって，補題が示された．　□

定理 16.21. $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ が正値ボレル可測関数なら，$f(x, \cdot)$ はすべての $x \in \mathbb{R}^n$ に対して可測で，

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y)\, dy \in [0, \infty] \tag{16.35}$$

は可測で

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x, y)\, dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(x, y)\, dx\, dy \tag{16.36}$$

となる．

証明. 補題 16.20 より $f(x, y) = \chi_A(x, y)$ とボレル集合 A を用いて表される場合は正しいとわかる．線形性より，結論は単純関数に持ち上がる．単調収束定理 (定理 16.6) をつかえば，正値ボレル可測関数にも結論が持ち上がる．　□

E が可測集合のとき，E 上の関数の理論を展開することもできる．一つの方法としては，E の外では関数を 0 とみなすことである．こうすれば，いろいろな概念を E 上の関数に対しても定義できる．たとえば，E 上のボレル可測関数 f が可積分であるとは，E 上で $F(x)=f(x)$ として，E^c 上 $F(x)=0$ とおいたとき，F が $\mathbb{R}^n$ 上可積分であることである．また，$\displaystyle\int_E f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} F(x)\,dx$ とおく．

定理 16.22. $f:\mathbb{R}^{n+m}=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ は可積分関数とする．

(1) $E=\left\{x\in\mathbb{R}^n\,:\,\displaystyle\int_{\mathbb{R}^m}|f(x,y)|\,dy=\infty\right\}$ は測度 0 である．

(2) $x\in\mathbb{R}^n\mapsto\chi_{E^c}(x)\displaystyle\int_{\mathbb{R}^m}f^+(x,y)\,dy-\chi_{E^c}(x)\int_{\mathbb{R}^m}f^-(x,y)\,dy\in[-\infty,\infty]$ は可測で，等式

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^m}f(x,y)\,dy\right)dx=\int_{\mathbb{R}^{n+m}}f(x,y)\,dx\,dy \tag{16.37}$$

が成り立つ．

ここで，$0\cdot\infty=0$ と約束している．また，

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^m}f(x,y)\,dy\right)dx=\int_{\mathbb{R}^n\setminus E}\left(\int_{\mathbb{R}^m}f(x,y)\,dy\right)dx \tag{16.38}$$

と解釈すること．

証明. (1) は定理 16.21 とチェビシェフの不等式により得られる．(2) は $f=f^+-f^-$ と分解して，定理 16.21 を用いればよい． □

16.5. **測度 0 の集合.** E が測度 0 の可測のとき，ボレル可測関数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ に対して，$\displaystyle\int_E f(x)\,dx=0$ となる．この意味で測度 0 の集合は大事な集合であるとわかる．

定義 16.23. E を可測集合とする．ある性質がほとんどすべての $x\in E$ に対して成り立つとは，その性質が成り立たない点全体が測度 0 となることである．$E=\mathbb{R}^n$ のときは，$\in E$ を省く．

測度 0 の集合を無視できるから，多くの定理を拡張できる．これは一例である．

定理 16.24. $E\subset\mathbb{R}^n$ を可測集合とする．$f_1,f_2,\dots:E\to\mathbb{R}$ をボレル可測関数列でほとんどすべての $x\in E$ に対して，$\displaystyle\lim_{j\to\infty}f_j(x)=f(x)$ が存在するものとする．さらに，可積分関数 $g:E\to\mathbb{R}$ が存在して，ほとんどすべての $x\in E$ に対して，$|f_j(x)|\le g(x)$ が成り立つとする．このとき，

$$\lim_{j\to\infty}\int_E f_j(x)\,dx=\int_E f(x)\,dx \tag{16.39}$$

が成り立つ．

定義 16.25 (ルベーグ可測集合，ルベーグ可測関数)**.**

(1) 集合 A,B の差集合 $A\ominus B$ を $A\ominus B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ で定義する．
(2) ボレル集合 A と測度 0 のボレル集合の部分集合 N の差集合 $A\ominus N$ として表される $\mathbb{R}^n$ の集合 B をルベーグ可測集合という．さらに，B のルベーグ測度を $|B|=|A|$ と定める．
(3) E をルベーグ可測集合として，$f:E\to[-\infty,\infty]$ がルベーグ可測であるとは，任意の $\lambda\in\mathbb{R}$ に対して，$\{f>\lambda\}$ がルベーグ可測集合であることをいう．

次のことは定義より明らかである．

補題 16.26.

(1) B のルベーグ測度の定義において，$|B|$ は A, N の取り方によらない．
(2) ボレル可測集合はルベーグ可測集合である．
(3) ルベーグ可測集合の補集合はルベーグ可測集合である．
(4) ルベーグ可測集合の可算合併はルベーグ可測集合である．

17. $\mathbb{R}^n$ 上のルベーグ測度に関する積分の性質

17.1. リーマン積分との関係． リーマン積分とルベーグ積分の関係を述べておこう．

定理 17.1. $f : \overline{R} \to \mathbb{R}$ が $R \in \mathcal{R}$ で連続なら，$\overline{R}$ 上リーマン積分が可能で，ルベーグ積分と一致する．

証明． 証明では，積分はすべてルベーグ積分と解釈する．$j \in \mathbb{N}$ として，$\overline{R}$ を j^n 個の長方形 $R_{j,1}, \cdots, R_{j,j^n}$ に等分する．ここで，$f_j = \displaystyle\sum_{k=1}^{j^n} \left(\inf_{R_{j,k}} f\right) \chi_{R_{j,k}}$ と定義すると，

$$I_j = \int_{\overline{R}} f_j = \sum_{k=1}^{j^n} \left(\inf_{R_{j,k}} f\right) |R_{j,k}|,\ j \in \mathbb{N} \tag{17.1}$$

は f の $\overline{R}$ 上のリーマン積分に収束する．一方で，f の $\overline{R}$ における一様連続性と定理 16.12 より I_j は $\displaystyle\int_{\overline{R}} f(x)\,dx$ に収束する． □

系 17.2. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は連続かつ可積分関数とする．このとき，f は $\mathbb{R}^n$ 上広義リーマン可積分で，その値は f の $\mathbb{R}^n$ 上のルベーグ積分と同じである．

証明． ルベーグの収束定理と定理 17.1 によって，$R_1, R_2, \cdots, R_j, \cdots$ が増大して，$\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} R_j = \mathbb{R}^n$ を満たしているとき，$\displaystyle\lim_{j\to\infty} \int_{R_j} f(y)\,dy$ が存在して，f の $\mathbb{R}^n$ 上のルベーグ積分に収束する． □

可積分関数の重要な例を挙げる．

系 17.3. $n = 1$ とする．このとき，関数 $x \in (0, \infty) \mapsto x^{-a} \in (0, \infty)$ が $[1, \infty)$ 上で可積分であるためには，$a > 1$ が必要十分である．関数 $x \in (0, \infty) \mapsto x^{-a} \in (0, \infty)$ が $(0, 1]$ 上で可積分であるためには，$a < 1$ が必要十分である．

証明． 最初の主張だけ証明する．x^{-a} が $[1, \infty)$ 上で可積分であるのと，

$$\int_{[1,\infty)} x^{-a}\,dx = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[1,\infty)}(x) x^{-a}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \chi_{[1,R)}(x) x^{-a}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^R x^{-a}\,dx < \infty, \tag{17.2}$$

は同値である．ここで，3 番目の不等式を得るのに単調収束定理 (定理 16.6) を用いた．また，最後の積分はリーマン積分である．ここで，不定積分を計算すればわかるように $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_1^R x^{-a}\,dx < \infty$ と $a > 1$ は同値であるから，証明が完成した． □

補題 17.4. U を開集合とする．有界関数 $f: U \to \mathbb{R}$ に対して，

$$\overline{f}(x) = \lim_{r \downarrow 0} \left(\sup_{y \in B(x,r)} f(y) \right)$$
$$\underline{f}(x) = \lim_{r \downarrow 0} \left(\inf_{y \in B(x,r)} f(y) \right)$$

とおく．このとき，f が x で連続であることと，$\overline{f}(x) = \underline{f}(x)$ であることが同値である．

証明. $\overline{f}(x) - \underline{f}(x) = \lim_{r \downarrow 0} \sup_{y,z \in B(x,r)} |f(y) - f(z)|$ より明らかである． □

次の定理はルベーグの定理と呼ばれる．

定理 17.5. R を直方体，$\overline{R}$ をその閉包，すなわち，R の境界をすべて含めたものとする．このとき，有界関数 $f: \overline{R} \to \mathbb{R}$ がルベーグ可積分であることと，f の不連続点の集合が 0 集合をなすことは同値になる．

証明. $\Delta^N = \{R_j\}_{j=1}^{N^n}$ を $\overline{R}$ の N 等分割とする．$S_{\Delta^N}(f)$，$s_{\Delta^N}(f)$ でそれぞれ過剰和，不足和を表すことにする．

ここで，ほとんどいたるところ，$\overline{R}$ 上で

$$\sum_{j=1}^{N} \left(\sup_{x \in R_j} f(x) \right) \chi_{R_j}(x) \to \overline{f}(x) \tag{17.3}$$

であるから，ルベーグの収束定理によって

$$S_{\Delta^N}(f) = \int_{\overline{R}} \sum_{j=1}^{N} \left(\sup_{x \in R_j} \overline{f}(x) \right) \chi_{R_j}(x)\, dx \to \int_{\overline{R}} \overline{f}(x)\, dx \tag{17.4}$$

である．不足和に関しても同じことが言えて，結局

$$\int_{\overline{R}} \underline{f}(x)\, dx = \lim_{|\Delta| \to 0} s_\Delta(f) \le \lim_{|\Delta| \to 0} S_\Delta(f) = \int_{\overline{R}} \overline{f}(x)\, dx \tag{17.5}$$

となる．したがって，

$$\begin{aligned} f \text{ の不連続点の集合が } 0 \text{ 集合をなす.} &\iff \int_{\overline{R}} \overline{f}(x)\, dx = \int_{\overline{R}} \underline{f}(x)\, dx. \\ &\iff \lim_{|\Delta| \to 0} s_\Delta(f) = \lim_{|\Delta| \to 0} S_\Delta(f). \\ &\iff f \text{ はリーマン積分可能である.} \end{aligned}$$

□

17.2. **稠密性.** 正値可測関数の単調増大極限として表されるという以外には可積分関数の構造は非常に複雑である．そこで，可積分関数を C_c-級，もっと言えば C_c^∞-級関数で近似したい．ここで，

$$\begin{aligned} \mathrm{supp}(f) &:= \overline{\{f \neq 0\}},\ f \in C(\mathbb{R}^n) \\ C_c(\mathbb{R}^n) &:= \{f \in C(\mathbb{R}^n) : \mathrm{supp}(f) \text{ はコンパクト } \} \\ &= \{f \in C(\mathbb{R}^n) : \text{ある } R > 0 \text{ が存在して，} \quad f(x) = 0,\ |x| > R\} \\ C_c^\infty(\mathbb{R}^n) &:= C_c(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

とおく．

命題 17.6. 可積分関数 f の積分は $C_c(\mathbb{R}^n)$ 近似が可能である．つまり，$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が可積分で $\varepsilon > 0$ なら，$g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ を $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)-g(x)|\,dx < \varepsilon$ となるように選べる．

証明. 何段階かに分けて証明する．

(1) E を可測集合で $f=\chi_E$ のときを考える．この場合ですら，証明はかなり難しい．

$$\mathcal{C} := \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{g \in C_c(\mathbb{R}^n)} \left\{ F \in \mathcal{B} : \int_{\mathbb{R}^n} |\chi_{F\cap R} - g| < \varepsilon \right\} \tag{17.6}$$

とおこう．すると，$\mathcal{R} \subset \mathcal{C}$ となる．ここで，集合 $F \in \mathcal{B}$ に対して，$F^c \in \mathcal{B}$ としよう．$\varepsilon > 0$ とする．$\mathcal{R} \subset \mathcal{C}$ だから $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ と $\psi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ をうまく選べば，$\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi - \chi_R| < \frac{\varepsilon}{2}$ かつ $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |\psi - \chi_{R\cap F}| < \frac{\varepsilon}{2}$ となる．ここで，$F_1, F_2 \in \mathcal{B}$ とする．すると，すべての $\varepsilon > 0$ に対して $\varphi_1, \varphi_2 \in C_c(\mathbb{R}^n)$ が存在して，

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_j(x) - \chi_{F_j}(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2},\ j=1,2 \tag{17.7}$$

となる．φ_j を $\max(0, \min(\varphi_j, 1))$ で置き換えて，$0 \le \varphi_j \le 1$ としてよい．すると，三角不等式により，

$$\begin{aligned}|\varphi_1(x)\varphi_2(x) - \chi_{F_1\cap F_2}(x)| &\le |\varphi_1(x) - \chi_{F_1}(x)| + |\chi_{F_1}(x)\varphi_2(x) - \chi_{F_1}(x)\chi_{F_2}(x)| \\ &\le |\varphi_1(x) - \chi_{F_1}(x)| + |\varphi_2(x) - \chi_{F_2}(x)|\end{aligned}$$

だから，

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_1(x)\varphi_2(x) - \chi_{F_1\cap F_2}(x)|\,dx \le \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_1(x) - \chi_{F_1}(x)|\,dx + \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_2(x) - \chi_{F_2}(x)|\,dx < \varepsilon \tag{17.8}$$

となる．したがって，$F_1 \cap F_2 \in \mathcal{C}$ が証明された．ここで，

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi - \psi - \chi_{R\cap F^c}| = \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi - \psi + \chi_{R\cap F^c} - \chi_R| \le \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi - \chi_R| + |\psi - \chi_{R\cap F}| < \varepsilon \tag{17.9}$$

だから，$F^c \in \mathcal{C}$ である．次に，$F_1, F_2, \cdots \in \mathcal{C}$ を互いに交わらない列とする．系 15.15 により，$m\left(\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} (R \cap F_j) \setminus \bigcup_{j=1}^{N} F_j\right) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ である．$F_1, F_2, \cdots, F_N \in \mathcal{C}$ だから，

$$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_N \in C_c(\mathbb{R}^n) \tag{17.10}$$

を $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_j - \chi_{R\cap F_j}| < \frac{\varepsilon}{2N}$ となるようにとれる．$\varphi = \displaystyle\sum_{j=1}^{N} \varphi_j$ とすると，

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi - \chi_{R\cap\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j}| < \varepsilon \tag{17.11}$$

である．よって，$\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j \in \mathcal{Z}$ と $\mathcal{C} = \mathcal{B}$ が証明された．$E \in \mathcal{B} = \mathcal{C}$ だから，所望の結果が証明された．

(2) 線形性によって f が単純関数でも定理の結論が成り立つ．

(3) 正値可積分関数は正値単純関数の単調増大列によって近似できるから，f が正値可積分関数でも定理の結論が成り立つ．

(4) 最後に，f が一般の可積分関数でも $f = f^+ - f^-$ と分けることによって，f が正値可積分関数でも定理の結論が成り立つ．

□

$t \in \mathbb{R}$ に対して，$\tilde{\rho}(t) = \begin{cases} \exp(-t^{-1}) & (t > 0), \\ 0 & (t \le 0) \end{cases}$ とする．N についての帰納法で $\tilde{\rho} \in C^N(\mathbb{R})$ と証明できるから，$\tilde{\rho} \in C^\infty(\mathbb{R})$ である．$x \in \mathbb{R}^n$ に対して，$\rho_0(x) = \tilde{\rho}(1 - |x|^2)$ とおけば，$\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ である．つまり，$C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ には 0 でない関数が存在する．次の定理では，そのような関数で可積分関数を近似できることを示す．

定理 17.7. 可積分 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ と $\varepsilon > 0$ に対して，$g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ を $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - g(x)|\, dx < \varepsilon$ となるように選べる．

証明. 命題 17.6 に対して，$f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ としてよい．$\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ を正値関数で積分 1 となるものとして $\rho_j(x) = j^n \rho(j\,x)$ とおこう．f_j を $f_j(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \rho_j(x-y) f(y)\, dy$ と定義する．$\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ は一様収束して，一定のコンパクト集合に台を持つから，ルベーグの収束定理によって，

$$\lim_{j \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f_j(x)|\, dx = 0 \tag{17.12}$$

となる．$\varepsilon > 0$ に応じて j を大きくとって $g = f_j$ とすれば，求める g が得られる． □

講義で必要になったらまた書き足します.

18. 抽象的な測度空間

18.1. **測度.**

18.2. **積分.**

18.3. **積分定理.**

18.4. L^p**-空間.** L^p-空間とそれに関連する不等式を調べる.

定義 18.1.

(1) $1 \le p < \infty$, E を可測集合とする. 可測関数 $f : E \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ もしくは可測関数 $f : E \to \mathbb{C}$ に対して, $L^p(E)$-ノルムは

$$\|f\|_{L^p(E)} = \left(\int_E |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{18.1}$$

で定義される.

(2) E を可測集合とする. 可測関数 $f : E \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ もしくは可測関数 $f : E \to \mathbb{C}$ に対して, $L^\infty(E)$-ノルムは

$$\|f\|_{L^\infty(E)} = \inf\{R > 0 : \text{ほとんどすべての } x \in E \text{ に対して } |f(x)| \le R\} \tag{18.2}$$

で定義される.

(3) $1 \le p \le \infty$ に対して, $L^p(E)$ は可測関数 f で $\|f\|_{L^p(E)}$ が有限なもの全体のなす線形空間とする.

$E = \mathbb{R}^n$ の場合は (E) を省く.

次の補題は簡単な計算なので, 証明は省略する.

補題 18.2 (Young 不等式)**.** $1 < p < \infty$ とする. $q = \dfrac{p}{p-1}$ とおくとき,

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad (a, b > 0) \tag{18.3}$$

が成り立つ.

定理 18.3. $1 < p < \infty$ とする. $q = \begin{cases} \infty & (p = 1), \\ \dfrac{p}{p-1} & (1 < p < \infty), \\ 1 & (p = \infty), \end{cases}$ とおく. f, g を可測集合 E 上の可測関数とする.

$$\text{(ヘルダーの不等式)} \quad \|fg\|_{L^1(E)} \le \|f\|_{L^p(E)} \|g\|_{L^q(E)}. \tag{18.4}$$

$$\text{(Minkowski の不等式)} \quad \|f + g\|_{L^p(E)} \le \|f\|_{L^p(E)} + \|g\|_{L^p(E)}. \tag{18.5}$$

証明. $L^p(E)$-のノルムの定義より, f と g は正値としてよい. $p = 1$ か $p = \infty$ のときの証明は易しいので省略する. 単調収束定理 (定理 16.6) より, f と g は単純関数としてよい. f と g は 0 ではないとしてよい.

(1) 補題 18.2 より，$ab = (\theta a)(\theta^{-1}b) \le \dfrac{\theta^p a^p}{p} + \dfrac{\theta^{-q}b^q}{q}$ だから，

$$\|fg\|_1 \le \frac{\theta^p \|f\|_p{}^p}{p} + \frac{\theta^{-q}\|f\|_q{}^q}{q}. \tag{18.6}$$

$\theta > 0$ を $\theta^p \|f\|_p{}^p = \theta^{-q}\|f\|_q{}^q$ となるように選べば，(18.4) が得られる．

(2) 関数 $\varphi(t) = t^p$ の凸性によって，

$$\begin{aligned}
&\left(\int_E \left(\frac{f(x)+g(x)}{\|f\|_{L^p(E)} + \|g\|_{L^p(E)}}\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left\{\int_E \left(\frac{\|f\|_{L^p(E)}}{\|f\|_{L^p(E)} + \|g\|_{L^p(E)}} \frac{f(x)}{\|f\|_{L^p(E)}} + \frac{\|g\|_{L^p(E)}}{\|f\|_{L^p(E)} + \|g\|_{L^p(E)}} \frac{g(x)}{\|g\|_{L^p(E)}}\right)^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \\
&\le \left(\int_E \frac{\|f\|_{L^p(E)}}{\|f\|_{L^p(E)} + \|g\|_{L^p(E)}} \frac{f(x)^p}{\|f\|_{L^p(E)}^p} + \frac{\|g\|_{L^p(E)}}{\|f\|_{L^p(E)} + \|g\|_{L^p(E)}} \frac{g(x)^p}{\|g\|_{L^p(E)}^p}\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

となるので，(18.5) が得られる．

□

定義 18.4 (局所可積分性)**.** 可測関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が局所可積分であるとは，$R \in \mathcal{R}$ に対して，$\chi_R \cdot f$ が可積分であることである．

系 18.5. $1 \le p \le \infty$ のとき，L^p 関数は局所可積分である．

証明. ヘルダーの不等式より明らかである． □

Part 5. レポート問題

19. 三角多項式の問題

問題 54. $n \in \mathbb{N}$ とする．多項式 $P_n(x)$, $Q_n(x)$ が存在して，

$$\cos(n\,x) = P_n(\cos x),\ \sin(n\,x) = Q_n(\cos x)\sin x \tag{19.1}$$

と表されることを示せ．

問題 54.

解法 1　数学的帰納法によって証明する．$n = 1$ のときは $P_1(x) = x$, $Q_1(x) = 1$ として成り立つ．$n = k$ で (19.1) が成り立つと仮定する．$n = k+1$ に対して，三角関数の加法定理によって

$$\cos(k+1)x = \cos kx \cos x - \sin kx \sin x = P_k(\cos x)\cos x - Q_k(\cos x)(1-\cos^2 x) \tag{19.2}$$

なので，$P_{k+1}(x) = xP_k(x) + (x^2-1)Q_k(x)$ とすれば，$n = k+1$ でも (19.1) を満たす多項式が存在することがわかる．同様に，三角関数の加法定理によって

$$\sin(k+1)x = \sin nx \cos x + \cos nx \sin x = Q_n(\cos x)\cos x \sin x + P_n(\cos x)\sin x \tag{19.3}$$

なので，$Q_{n+1}(x) = xQ_n(x) + P_n(x)$ がそのような多項式となる．以上より，すべての $n \in \mathbb{N}$ について，(19.1) が成り立つ多項式 $P_n(x)$, $Q_n(x)$ が存在することが示された．

解法 2　$\cos(nx) + i\sin(nx) = e^{inx} = (e^{ix})^n = (\cos x + i\sin x)^n$ の等式の実部と虚部を比較する．

□

20. 周期関数の問題

問題 55 (★). $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ を次の漸化式で定める．

$$x_0 = 0,\ \int_{x_{n-1}}^{x_n} (1+|\cos t|)\,dt = n(n+1) \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{20.1}$$

(1) $n = 0, 1, \cdots$ に対して，$a_n = \displaystyle\int_0^{x_n} (1+|\cos t|)\,dt$ を求めよ．

(2) 実数 α を適当に定めると，$f_\alpha(x) = \displaystyle\int_0^{x} (|\cos t| - \alpha)\,dt$ は x の π-周期関数となる．このような α を求めよ．以後，この α を固定する．

(3) $|f_\alpha(x)| \le (1+|\alpha|)\pi$ を証明せよ．

(4) $n = 0, 1, \cdots$ に対して，$b_n = \displaystyle\int_0^{x_n} (|\cos t| - \alpha)\,dt$ と定める．a_n を b_n と x_n を用いて表せ．

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n^3}$ を計算せよ．

問題 55.

(1) $a_n = \dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

(2) f_α が π-周期関数であるためには，$f_\alpha(\pi) = f_\alpha(0)$ が成り立たないといけないので，$\alpha = \dfrac{2}{\pi}$ と求まる．逆に，α がこの値の時，

$$f_\alpha(x+\pi) - f_\alpha(x) = \int_x^{x+\pi} (|\cos t| - \alpha)\ dt = \int_0^{\pi} (|\cos t| - \alpha)\ dt = 0 \tag{20.2}$$

となるので，確かに f_α は π-周期であるとわかる.【注意】π が f_α の最小周期であることを確かめたければ，f'_α を考えるとわかる.

(3) f_α の π-周期性によって，$0 \le x \le \pi$ としてよい．すると，積分の三角不等式と $|\cos t| \le 1$ によって，

$$|f_\alpha(x)| \le \int_0^\pi (1+\alpha)\,dt = (1+\alpha)\pi \tag{20.3}$$

がわかる.

(4) $a_n - b_n = (1+\alpha)x_n$ である.

(5) $\dfrac{a_n}{n^3} \to \dfrac{1}{3}$ で，$\dfrac{b_n}{n^3} \to 0$ だから，$\dfrac{x_n}{n^3} \to \dfrac{1}{3+3\alpha}$ である.

□

21. フーリエ級数の計算と関連のある問題

問題 56.

(1) $m, n \in \mathbb{Z}$ として次の積分を求めよ.

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx,\ J = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin(mx)\,dx \tag{21.1}$$

(2) 実数変数 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ の関数

$$f(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n) = \int_{-\pi}^{\pi} \left\{x^2 - a_0 - a_1 \sin x - a_2 \sin 2x - \cdots - a_n \sin nx\right\}^2\,dx \tag{21.2}$$

の最小値を求めよ.

問題 56.

(1) 定理 5.1 より，符号の打ち消しあいなどに注意して，$m, n \in \mathbb{Z}$ に対し，

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\,dx = \pi(\delta_{m-n,0} - \delta_{m+n,0}) = \begin{cases} \pi & (m = n \neq 0) \\ -\pi & (m = -n \neq 0) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \tag{21.3}$$

また，J を定義している積分は奇関数であるから，

$$J = 0 \tag{21.4}$$

である.

(2) (1) の結果より，とりわけ $m \neq n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\,dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx\,dx = \pi \tag{21.5}$$

だから，$J = 0$ とあわせて，

$$f(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n) = \int_{-\pi}^{\pi} \{x^2 - a_0 - a_1 \sin x - a_2 \sin 2x - \cdots - a_n \sin nx\}^2\,dx \tag{21.6}$$

の右辺の展開後の積分は大幅に簡略化できて，関数の偶奇性より，

$$f(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n) = 2\int_0^\pi \left(x^4 + a_0^2 + \sum_{k=1}^n a_k^2 \sin^2 kx - 2a_0 x^2\right)dx \tag{21.7}$$

となる．この積分を計算すると，

$$\begin{aligned} f(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n) &= 2\left[\frac{1}{5}x^5 + a_0^2 x - \frac{2}{3}a_0 x^3\right]_0^\pi + \pi\sum_{k=1}^n a_k^2 \\ &= \frac{2}{5}\pi^5 + 2a_0^2\pi - \frac{4}{3}a_0\pi^3 + \pi(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) \end{aligned}$$

となるので，この最小値は，a_0 については第 2 項と第 3 項,

$$2\pi\left(a_0^2 - \frac{2}{3}\pi^2 a_0\right) = 2\pi\left\{\left(a_0 - \frac{\pi^2}{3}\right)^2 - \frac{\pi^4}{9}\right\} \tag{21.8}$$

を考え，$a_0 = \dfrac{\pi^2}{3}$ のときが最小で，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ については明らかにすべて 0 のとき最小になる．そのときの最小値は,

$$f\left(\frac{\pi^2}{3}, 0, 0, \cdots, 0\right) = \frac{2}{5}\pi^5 - \frac{2}{9}\pi^5 + \pi\cdot 0 = \frac{8}{45}\pi^5 \tag{21.9}$$

である．

□

22. フーリエ級数展開問題

問題 57.

(1) 次の条件を満たす不連続関数 f のフーリエ級数を求めよ．
  (a) $x \in (-\pi, \pi]$ のとき，$f(x) = x(\pi - x)^2$ を満たす．
  (b) $f(x)$ は 2π-周期である．

(2) $g_1(x) = \displaystyle\sum_{j=-\infty}^{\infty} \max(0, 1 - |x - j|) \equiv 1$ を示せ．

(3) $g_2(x) = \displaystyle\sup_{j\in\mathbb{Z}}(1 - |x - j|)$ の周期 ℓ を求めて，その周期に合わせてフーリエ級数展開せよ．

問題 57.

(1) (3.9)，(3.18)，(3.23) より，

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}(-1)^{n-1}\sin(nx) = \frac{1}{2}x$$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}(-1)^{n-1}\cos(nx) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}$$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^3}(-1)^{n-1}\sin(nx) = \frac{\pi^2 x}{12} - \frac{x^3}{12}$$

だから,

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n-1}\sin(nx)$$
$$x^2=\frac{\pi^2}{3}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^{n-1}\cos(nx)$$
$$x^3=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\pi^2}{n}-\frac{12}{n^3}\right)(-1)^{n-1}\sin(nx)$$

となる．よって,

$$x(\pi-x)^2=-\frac{2\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{n^2}(-1)^{n-1}\cos(nx)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4\pi^2}{n}-\frac{12}{n^3}\right)(-1)^{n-1}\sin(nx) \tag{22.1}$$

となる．

(2) 次のグラフの形状を考えるとはっきりする．

(3) $\ell=1$ である．したがって，与えられた関数は偶関数であるから，つぎのような展開ができる．

$$g_2(x)=\sum_{l=0}^{\infty}a_l\cos(2\pi lx) \tag{22.2}$$

ここで,

$$a_0=\int_0^1 g_2(x)\,dx=\frac{3}{4},\ a_l=2\int_0^1 g_2(x)\cos(2\pi lx)\,dx=4\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x)\cos(2\pi lx)\,dx \tag{22.3}$$

$a_l\,(l\geq 0)$ を計算してみると,

$$\begin{aligned}a_l&=\frac{2}{\pi l}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x)(\sin(2\pi lx))'\,dx\\&=\frac{2}{\pi l}\left[(1-x)\sin(2\pi lx)\right]_0^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{\pi l}\int_0^{\frac{1}{2}}\sin(2\pi lx)\,dx\\&=\frac{1}{\pi^2l^2}(1-(-1)^l).\end{aligned}$$

よって,

$$f(x)=\frac{3}{4}+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^l}{\pi^2l^2}\cos(2\pi lx) \tag{22.4}$$

が得られる．

□

23. フーリエ級数の収束問題

問題 58. 偶関数 $f(x)=|\sin x|$ を 2π-周期関数としてみなしたときのフーリエ級数を求め，その収束，発散に関して論じよ．さらに，収束する場合は $f(x)$ に収束しているかを論じよ．

問題 58. 偶関数だから,

$$|\sin x|=\sum_{j=0}^{\infty}a_j\cos(jx) \tag{23.1}$$

なる展開が可能で，係数は

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|\,dx = \frac{2}{\pi} \tag{23.2}$$

および

$$\begin{aligned} a_j &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(jx)|\sin x|\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos(jx)\sin x\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (\sin(j+1)x - \sin(j-1)x)\ dx \end{aligned}$$

$j=1$ のときは，$a_1 = 0$ である．$j \geq 1$ のときは計算を続けると，

$$a_j = \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^{j-1}-1}{j-1} - \frac{(-1)^{j-1}-1}{j+1}\right)$$

となる．これが 0 ではないのは偶数のときのみで，

$$a_{2j} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2j+1} - \frac{1}{2j-1}\right) = -\frac{4}{\pi(4j^2-1)} \tag{23.3}$$

が得られる．したがって，

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(4j^2-1)}\cos(2jx) \tag{23.4}$$

となる．

$\omega_f(h,x) \leq h$ であるから，

$$\int_0^1 \frac{\omega_f(h,x)}{h}\,dh \leq \int_0^1 dh = 1 < \infty \tag{23.5}$$

ディニ条件 (定理 4.2 を参照) が満たされるので，等号 (23.4) はすべての x に関して成り立つ． □

24. 微分方程式への応用

問題 59 (★)**.** g を 2π-周期の C^∞-級関数とする．f の微分方程式

$$f \in C^2(\mathbb{T}) \quad (\text{つまり，周期が } 2\pi \text{ の } C^2\text{-級関数}), \quad (1-\Delta)f(t) = g(t), \quad t \in \mathbb{R} \tag{24.1}$$

は唯一の解を持つことを示せ．また，その解が C^∞-級であることも示せ．

問題 59.

(1) 【存在の証明】g は 2π-周期の C^∞-級関数だから，

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(g)e^{ikx} \tag{24.2}$$

なる展開が可能である．ここで，

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}}(1+|k|)^L|c_k(g)| < \infty \tag{24.3}$$

である．関数 f を

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{c_k(g)}{1+k^2}e^{ikx} \tag{24.4}$$

と定めると，f の第 k フーリエ係数 $c_k(f)$ は

$$c_k(f) = \frac{c_k(g)}{1+k^2} \tag{24.5}$$

で与えられるから，(24.3) と同じ形の条件

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}}(1+|k|)^L|c_k(g)| < \infty \tag{24.6}$$

が得られる．(24.6) より，$f \in C^\infty$ で項別微分が自由にできるので，

$$(1-\Delta)f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(g)e^{ikx} = g(x) \tag{24.7}$$

となる．

(2) 【一意性の証明】h も同じく微分方程式の解とすると，

$$(1-\Delta)(f(x)-h(x)) = (1-\Delta)f(x)-(1-\Delta)h(x) = g(x)-g(x) = 0 \tag{24.8}$$

であるから，2 階線形微分方程式の一般論より，

$$f(x)-h(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} \tag{24.9}$$

となる．しかし，$f-h$ も周期関数であるから，$C_1 = C_2 = 0$ である．これは $f \equiv h$ を意味している．

□

25. ルベーグ積分の問題 1

問題 60 (ルベーグの収束定理)．$0 < \alpha < \infty$ とする．f を $0 < \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx < \infty$ となる正値可測関数とする．このとき，

$$L = \lim_{n\to\infty} n\int_{\mathbb{R}} \log\left\{1+\left(\frac{f(x)}{n}\right)^\alpha\right\}dx \tag{25.1}$$

を計算せよ．

問題 60. $\alpha \geq 1$ の場合，

$$\log(1+t^\alpha) \leq \log(1+t)^\alpha = \alpha\log(1+t) \leq \alpha t \tag{25.2}$$

であるから，

$$n\log\left\{1+\left(\frac{f(x)}{n}\right)^\alpha\right\} \leq \alpha f(x) \tag{25.3}$$

となる．また，

$$\lim_{n\to\infty} n\log\left\{1+\left(\frac{f(x)}{n}\right)^\alpha\right\} = \begin{cases} f(x) & (\alpha = 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (\alpha > 1 \text{ のとき}) \end{cases} \tag{25.4}$$

である．よって，ルベーグの収束定理が使えて

$$L = \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx & (\alpha = 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (\alpha > 1 \text{ のとき}) \end{cases} \tag{25.5}$$

$\alpha < 1$ の場合

$$\liminf_{n\to\infty} n\int_{\mathbb{R}} \log\left\{1+\left(\frac{f(x)}{n}\right)^\alpha\right\}dx \geq \int_{\mathbb{R}} \liminf_{n\to\infty} n\log\left\{1+\left(\frac{f(x)}{n}\right)^\alpha\right\}dx = \infty \tag{25.6}$$

である．よって，$L=\infty$ となる．

【注意】$f(x) > \mu\chi_E(x)$ となる $\mu > 0$ と可測集合 E は存在するが，E を区間としてとれるかどうかはわからない． □

26. ルベーグ積分の問題 2

問題 61 (ルベーグの収束定理)**.** 等式 $*\ \lim\limits_{m\to\infty}\sqrt{m}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^m dx = 2\sqrt{\pi}$ を証明せよ．

問題 61. 初めに変数変換 (対称性) から，

$$\lim_{m\to\infty}\sqrt{m}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^m dx = 2\lim_{m\to\infty}\sqrt{m}\int_0^{\pi}\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^m dx \tag{26.1}$$

である．$y=\sqrt{m}x$ と変数変換すると，

$$\sqrt{m}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^m dx = \int_0^{\sqrt{m}\pi}\left(\frac{1+\cos(\sqrt{m^{-1}}y)}{2}\right)^m dy \tag{26.2}$$

となる．ここで，

$$\left(\frac{1+\cos(\sqrt{m^{-1}}y)}{2}\right)^m = \cos^{2m}\left(\frac{y}{\sqrt{m}}\right) \tag{26.3}$$

である．よって，

$$\int_0^{\sqrt{m}\pi}\left(\frac{1+\cos(\sqrt{m^{-1}}y)}{2}\right)^m dy = \int_0^{\sqrt{m}\pi}\cos^{2m}\left(\frac{y}{\sqrt{m}}\right) dy \tag{26.4}$$

となる．ここで，

$$\int_0^{\sqrt{m}\pi/2}\cos^{2m}\left(\frac{y}{\sqrt{m}}\right) dy \le \frac{\sqrt{m}\pi}{4}2^{-m} \tag{26.5}$$

だから，

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^{\sqrt{m}\pi}\left(\frac{1+\cos(\sqrt{m^{-1}}y)}{2}\right)^m dy = \lim_{m\to\infty}\int_0^{\sqrt{m}\pi/4}\cos^{2m}\left(\frac{y}{\sqrt{m}}\right) dy \tag{26.6}$$

となる．ここで，

$$\cos\theta \le 1-\frac{\theta^2}{100} \quad \left(0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\right) \tag{26.7}$$

であるから，

$$\cos^{2m}\left(\frac{y}{\sqrt{m}}\right) \le \left(1-\frac{y^2}{100m}\right)^{2m} \le \left[\exp\left(-\frac{y^2}{400m}\right)\right]^{2m} \quad \left(0\le y\le\frac{\sqrt{m}\pi}{4}\right) \tag{26.8}$$

したがって，

$$\chi_{\left(0,\frac{\sqrt{m}\pi}{4}\right)}(|y|)\cos^{2m}\left(\frac{y}{\sqrt{m}}\right) \le \exp\left(-\frac{y^2}{200}\right) \tag{26.9}$$

である．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{y^2}{200}\right) dy < \infty, \quad \lim_{m\to\infty}\cos^{2m}\left(\frac{y}{\sqrt{m}}\right)\chi_{\left(0,\frac{\sqrt{m}\pi}{4}\right)}(|y|) = \exp\left(-\frac{y^2}{4}\right) \quad (y\in\mathbb{R}) \tag{26.10}$$

だから，ルベーグの収束定理が使えて，

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\sqrt{m}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^m dx &= 2\lim_{m\to\infty}\int_0^{\sqrt{m}\pi/4}\cos^{2m}\left(\frac{y}{\sqrt{m}}\right)dy\\ &= 2\int_0^\infty e^{-y^2/4}\,dy\\ &= 2\sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

□

27. 級数の計算技術の問題 1

問題 62. 次の問に答えよ．

(1) $n=0,1,2,\cdots$ に対して $I_n=\displaystyle\int_0^1 (x\log x)^n\,dx$ を求めよ．

(2) 広義積分 $J=\displaystyle\int_0^1 x^x\,dx$ の値を小数点以下第 2 位まで求めよ．

問題 62.

(1) $I_n=\dfrac{(-1)^n}{(1+n)^{1+n}}\Gamma(1+n)=\dfrac{(-1)^n n!}{(1+n)^{1+n}}$.

(2) $J=\displaystyle\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{n!}\int_0^1 (x\log x)^n\,dx=0.78\cdots$.

□

28. 級数の計算技術の問題 2

問題 63. $0\le x\le 1$ とするとき，

$$\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)^2}=\int_0^x\frac{\mathrm{Arctan}y}{y}\,dy \tag{28.1}$$

を示せ．$x=1$ の時のこの数をカタラン数という．*Eugéne Charles Catalan*

問題 63. 初めに，

$$\mathrm{Arc}\tan x=\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)x^{2n+1}}{2n+1} \tag{28.2}$$

がすべての $x\in[0,1]$ で成り立つことに注意する．無限級数の収束半径が 1 であるから，すべての $0<a<1$ に対して，$0\le x<a$ でこの級数は一様収束する．したがって，

$$\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)^2}=\int_0^x\frac{\mathrm{Arctan}y}{y}\,dy(0\le x<1) \tag{28.3}$$

が成り立つ．両辺は $0\le x\le 1$ の連続関数なので，

$$\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)^2}=\int_0^x\frac{\mathrm{Arctan}y}{y}\,dy(0\le x\le 1) \tag{28.4}$$

となる． □

29. ギブス現象

問題 64 (★)**.** $f(x) = x\chi_{(-\pi,\pi)}(x)$, $x \in (-\pi, \pi]$ となる 2π 周期関数に関してギブス (Gibbs)-現象を確かめよ.

$$\int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\,dt \approx 1.8519 > \frac{\pi}{2} \tag{29.1}$$

は既知としてよい.

証明. (3.9) より

$$2\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \cdots\right) = f(x) \tag{29.2}$$

が求めるフーリエ級数である.

$$g_N(x) = f(x) + 2\sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k}{k}\sin kx \tag{29.3}$$

とおくと,

$$g_N'(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^N (-1)^k \cos kx = 1 + 2\sum_{k=1}^N \cos k(x+\pi) = \frac{2\sin\left[\dfrac{2N+1}{2}(x+\pi)\right]}{2\sin\left[\dfrac{1}{2}(x+\pi)\right]} \tag{29.4}$$

となる．そこで，$\dfrac{2N+1}{2}(x+\pi) = 2N\pi$ となる x，つまり $x = \dfrac{4N\pi}{2n+1} - \pi = \dfrac{2N-1}{2N+1}\pi$ である．このとき,

$$g_N(x) = \frac{2N-1}{2N+1}\pi + 2\sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k}{k}\sin\left(\frac{2N-1}{2N+1}k\pi\right) = \frac{2N-1}{2N+1}\pi - 2\sum_{k=1}^N \frac{1}{k}\sin\left(\frac{2k\pi}{2N+1}\right) \tag{29.5}$$

である．ここで，平均値の定理より,

$$g_N(x) = \pi - 2\sum_{k=1}^N \frac{1}{k}\sin\left(\frac{k}{N}\pi\right) + o(1) \tag{29.6}$$

となる．$N \to \infty$ として,

$$g_N(x) \to \pi - 2\int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{t}\,dt = \pi - 2\int_0^\pi \frac{\sin u}{u}\,dt < 0 \tag{29.7}$$

が得られる．これはギブス現象が起きることを表している． □