

空間的相互作用モデルによって都市における「流れ」を理解する

2020年6月11日都市・建築空間解析授業資料 吉川徹

参考書として石川(1988), 下総薫監訳(1987), 杉浦(1989), 谷村ほか(1986), 野上ほか(1986), 新谷(1993), 日本建築学会編(1992), 肥田野(2000), フット(1984)を挙げる。本稿はこれらに依った。

1 都市における「流れ」

都市には、風、電気、水、ガスなどの物理的な流れの他に、通勤や転居、物流、電話や図書館の利用など、人、品物、情報の流れがある。この流れを空間的相互作用, spatial interaction と呼ぶ。

空間的相互作用は、鉄道や道路の容量を規定するだけでなく、建築物にも大きな影響を及ぼす。たとえば、図書館等を新設した場合の利用者数等も、空間的相互作用をモデル化すれば推定できる。あるいは、競合する商業施設間の地域市場の奪い合い、すなわち「商圈」に関するモデルも空間的相互作用のモデルから推定できる。

2 空間的相互作用モデルとは

したがって、建築物の計画や理解にとって空間的相互作用の理解は重要である。このための数理モデルとしては、空間的相互作用モデル, spatial interaction model が代表的である。

たとえば各地区からの通所型高齢者施設, day-care centers for the elderly の利用者数 f (図1) は、

- (1) 地区の高齢者人口 O が多いほど増える。
- (2) 施設規模 D が大きいほど増える。
- (3) 施設までの距離 d が大きいほど減る。距離減衰 (distance decay) と呼ぶ。図2参照。

一般に始点 i から終点 j までの空間的相互作用 f が始点の放出量 O , 終点の吸収量 D , 両者の分離性 d によって定まると考えるモデル

$$f = f(O, D, d)$$

を空間的相互作用モデルと呼ぶ。

このモデルは地域施設計画, 交通施設計画, 土地利用計画などに使用される。

- (1) 地域施設利用者数を予測したい時
- (2) 地域施設の利用圏の広がりを予測したい時
- (3) 新設道路・鉄道での移動者数を予測したい時

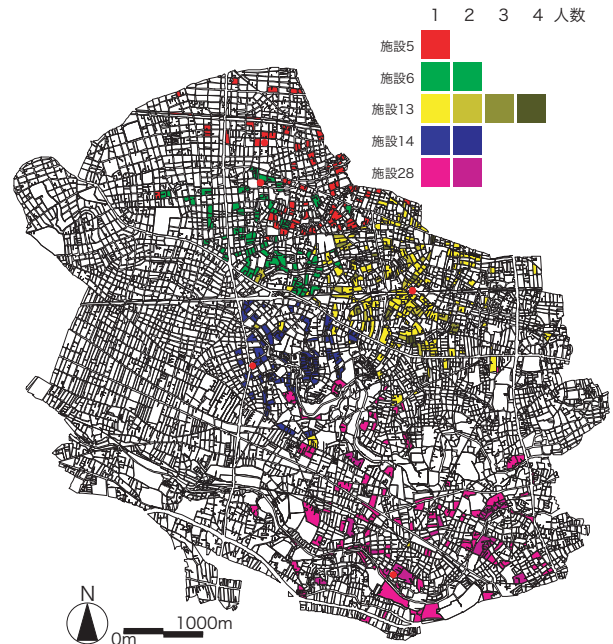


図1: 通所型高齢者施設利用者分布 (2000年、杉並区) (鈴木ほか、2002)

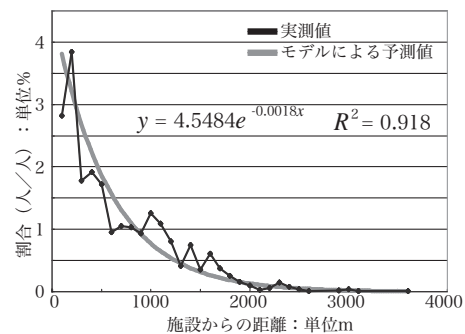


図2: 通所型高齢者施設利用率と道路距離 (2000年、杉並区) (鈴木ほか、2002)

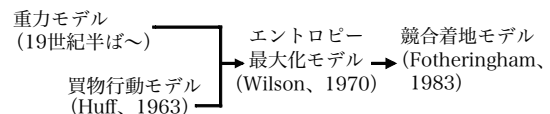


図3: 空間的相互作用モデルの発展の歴史

3 重力モデル

重力モデルは最古の空間的相互作用モデルである。ニュートンの万有引力の法則からの類推として提案された。

上記の通所型高齢者施設の例では、利用者数 f は地区高齢者人口 O と施設規模 D に比例し距離 d の β 乗に反比例すると考える。ここで G は比例定数、 β は距離減衰の激しさを表す「指数」である。

$$f = G \frac{OD}{d^\beta}$$

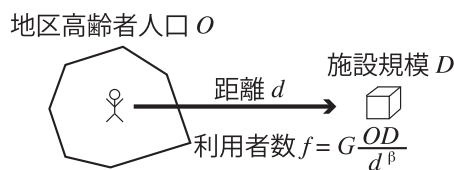


図 4: 重力モデル

G , β は実際のデータから当てはまりが最良になるように決める。より詳しいモデルとして O や D にも指数を付けるものがある（資料参照）。

3.1 重力モデルの歴史

よく引用されるものを示す。

(1) H. C. Carey (1858-1859) (経済学者)

人間の集合の求心力は集合の大きさに比例し、距離に反比例する。

(2) E. G. Ravenstein (1885) 「移住の法則」

Low of Migration. 英国の移住を詳細に分析。移住は、距離、目的地の吸引力（労働力需要、人口規模）と関連する。

(3) W. J. Reilly (1931) 「小売重力の法則」

Low of Retail Gravitation. 客の数は小売中心の人口規模に比例し、距離の二乗に反比例する。

(4) G. K. Zipf (1946)

二都市の結び付き（人口流動、新聞記事、新聞発行状況、電話量、電信数）は、両都市の人口に比例し、距離に反比例する。

1950年代後半から60年代前半に米国で郊外化が進み、道路建設計画のための交通量予測が必要となり、重力モデルの研究が進展した。

さらに、重力モデルを内包した都市圏の土地利用・交通量決定モデルとして、たとえばピッツバーグ都市圏を初め対象としたローリーモデル (Lowey,

1964) や、それを再構成したガリン・ローリーモデル (Garin, 1966) が開発された。モデルの解説はフット (1984) 参照。

なお、交通量予測を中心とした空間的相互作用の予測は、我が国の都市政策において多用されているが、それが過大評価であったために問題となる事例が発生し、その信頼性や精度向上のあり方の議論が進められている (森川高行ほか, 2004)。

		常住		ソルバー初期値		ソルバー収束値		
従業・通学地	常住地・町村	通勤・通学者	地	β	G	β	G	
		f	O	d	予測値	残差 ²	予測値	残差 ²
松江	出雲	1837	38207	63	2866.7	1060257	2255.4	175099
松江	大田	86	14866	104	409.3	104525	243.6	24832
松江	安来	1712	14477	46	2037.4	105901	1909.9	39166
松江	平田	1980	13526	46	1903.6	5839	1784.4	38243
松江	鹿島	2262	4297	32	1249.6	1024878	1433.8	685839
松江	島根	1049	2065	43	332.6	513251	323.7	526056
松江	美保	869	3327	45	489.3	144197	464.3	163787
松江	東出雲	2400	5757	27	2351.7	2330	2966.2	320619
松江	八雲	2057	2990	25	1424.7	399860	1875.6	32899
松江	玉湯	1391	3185	27	1301.1	8088	1641.0	62518
松江	宍道	1595	4608	39	902.2	479975	927.2	445980
松江	八束	574	1779	37	387.0	34976	409.5	27049
松江	広瀬	401	3991	54	407.6	43	349.4	2660
松江	伯太	121	2319	56	220.2	9843	185.0	4097
松江	仁多	160	3484	66	238.2	6112	182.6	511
松江	横田	50	3197	70	194.3	20821	144.2	8865
松江	大東	1552	6764	45	994.7	310570	943.9	369738
松江	加茂	615	2964	50	353.1	68609	315.9	89432
松江	木次	505	4428	61	354.4	22687	283.9	48897
松江	三刀屋	270	3828	56	363.5	8744	305.4	1253
松江	掛合	65	1806	63	135.5	4971	106.6	1732
松江	斐川	1059	11198	49	1388.9	108825	1256.9	39179
松江	湖陵	58	2395	72	137.6	6333	100.5	1805
松江	大社	417	7319	66	500.4	6949	383.6	1115
松江市 D		87587			残差 ² 和	4458587		3111372

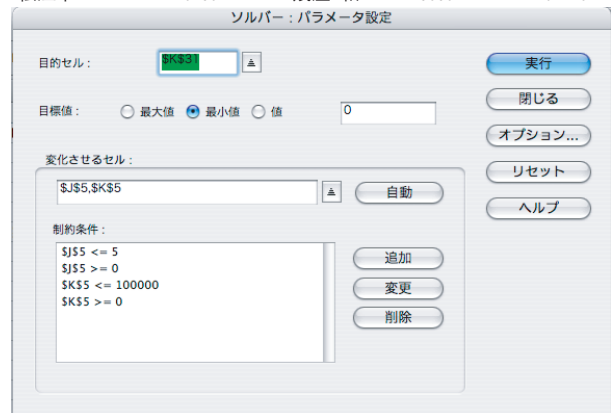


図 5: 繰り返し計算による重力モデルの当てはめ

3.2 重力モデルの G と β の求め方

初歩的な方法では、式の両辺を対数化して線形式にしてから、回帰分析を適用する。しかしこの方法では、対数化するとき誤差の大きさが場所によって異なった値に変換されるので、本来は望ましくない。対数化せずに、繰り返し計算で求める方法もある。

繰り返し計算の実例は次の通りである。平成2年国勢調査従業地・通学地統計より、島根県松江市への県内他市町村からの通勤・通学者数 (f) を、平均通勤・通学時間 (d) を距離、県内他市町村の自宅外通勤・通学者数を始点の放出量 (O)、松江市の自宅外通勤・通学者数を終点の吸収量 (D) として、重力モデル $f = G \frac{OD}{d^\beta}$ で予測する。

Microsoft Excel で f , d , O , D を表にして、 β と G に適宜な初期値, initial value を設定する。「ツール, Tools」メニューの「ソルバー, Solver」を起動する (図5)¹。

「目的セル, Target Cell」に残差 (予測値と実測値の差, residual error) の平方和, sum of squares (図5の残差平方和) を指定し、目標値, Equal To を最小値, Min とし、変化させるセル, By Changing Cell を β と G とし、制約条件, Subject to the constraints を適宜指定する。ソルバーを実行すると、繰り返し計算で求めた解が得られる。解が不適切と思われる場合には、初期値を調整して、再度ソルバーを実行する。

なお、この例では当てはまりの良さを表す決定係数 R^2 は 0.8171 となり、概ね 80% の情報がこのモデルで説明されたと評価できる。

3.3 重力モデルの問題点

理論的な根拠がない 万有引力の法則からの類推に過ぎない。集計値のみを問題としており、個人の行動との関係が不明である。

内部一貫性を持たない たとえば、住宅団地からスーパーマーケットへの買物客を重力モデルで表したとする。第1期開発の人口が10,000人で、近くのスーパーマーケットが5,000m²とする。ここで人口10,000人の第2期開発によって人口が2

¹ Excel のバージョンによっては標準設定では表示されない場合があるので、アドインを追加する必要がある。たとえば Excel2010 では、「ファイル」タブ→「オプション」→「アドイン」→「管理」ボックスの「Excel アドイン」→「検索」→「有効なアドイン」ボックス一覧の「ソルバーアドイン」にチェックを入れ「OK」、の手順で追加できる

倍となり、それに対応してスーパーマーケットも5,000m²の増床を行ったとしよう。

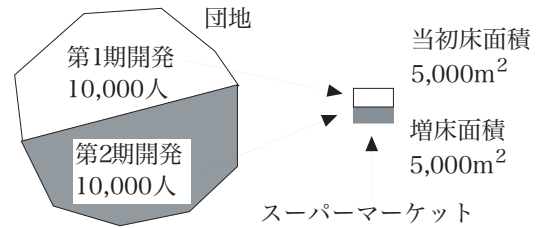


図6: 内部一貫性問題

この時、住宅団地からスーパーマーケットへの買物客は2倍に増えると考えるのが自然である。しかし、重力モデルを用いると、発生量 O も吸収量 D も2倍に増えるので、 2×2 で4倍になる。

地図パターン問題 多くの場合、出発地や目的地の位置や規模には、地域的な偏り (地図パターン) がある。するとたとえば実際に β が2.5と求められても、これが本当に距離減衰の激しさを表すのか、単に対象地域での地図パターンによって偶然に得られた値であるのかが判断できない (資料参照)。

モデルの同定の問題 たとえ数理モデルが現実を正しく説明できていても、偏りが大きいデータから決められた β には大きな誤差が付きまとう。まして数理モデルが正しくない、たとえば数式の形が違っていたり、重要な要因が数式に含まれていないのであれば、 β の決定作業そのものが無意味である。たとえば図の場合、ふたつのモデルのどちらでも説明できる。

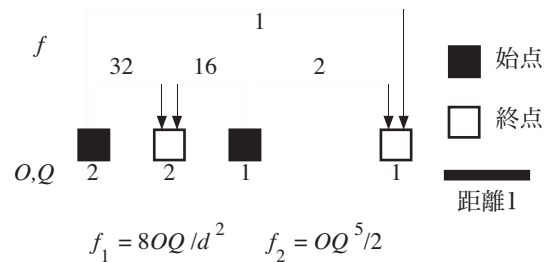


図7: モデルの同定の問題

4 重力モデルの理論的根拠

この問題に関しては多くの研究があるので、現在では一定の理論的根拠があると言ってよいだろう。

効用最大化から J. H. Niedercorn, et al (1969) による。個人は移動に使える時間と費用に限りがあるなかで最も効用（消費者が財を消費したりサービスを享受することによって感じる嬉しさ、満足度, utility）が大きくなるように旅行するという前提から重力モデルが導き出される。

介在機会モデルから 介在機会モデル, intervening opportunity model とは, S. A. Stouffer (1940) による次のモデルである (古山, 2000)。たとえば大学生が大学の周辺に下宿を探すとしよう。その時にある地区に学生が住む確率は、その地区にある空き下宿 (図 8 の a) の数に比例し、その地区より大学に近い地区にある空き下宿 (図 8 の b) の数に反比例する。

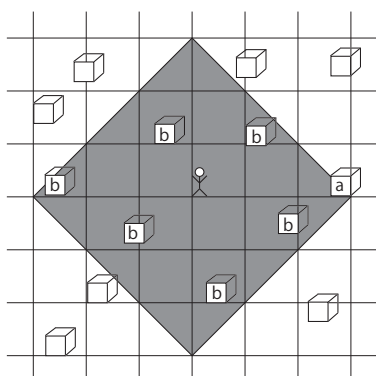


図 8: 介在機会モデル

このモデルからも B. Harris (1964) によって、重力モデルに類似した式が導出された。

対数尤度 (エントロピー) 最大化モデルから 後述。

ロジットモデルから 後述。

5 Huff による買い物行動モデル

買い物行動のモデルとして, Reilly の小売り重力の法則では、個人の選択行動をモデル化していない問題点があった。このため、たとえば日によって訪れる商店 (街) が異なるなど、現実の買い物

行動によく見られる諸現象が扱いにくい。Huff は、個人の商店 (街) 選択行動を確率モデル化することによって、この問題を解決した。

Huff モデルでは、消費者 i が選択できる n 個の商店 (街) から特定の商店 (街) j を選ぶ確率 p_{ij} を定式化する。したがって、消費者 i の買い物行動の総量 (総訪問回数, 総訪問時間, 総購買量など) はこのモデルでは決定されない。

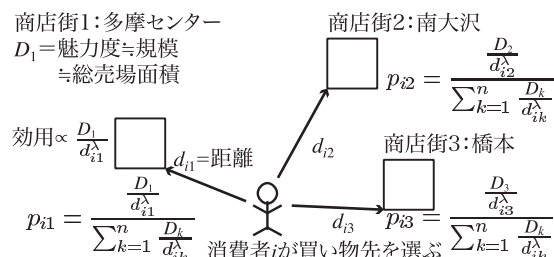


図 9: Huff モデル

確率 p_{ij} は、消費者 i にとっての商店 (街) j を訪れる効用に比例する。この効用は、商店 (街) の魅力度 D_j に比例し、消費者 i の居住地から商店 (街) j までの距離 d_{ij} の λ 乗に反比例する。

商店 (街) の魅力度を直接に測るのは困難なので、一般に売場面積などの規模指標を用いる。これは、大規模な規模商店 (街) ほど、品揃えが豊富で選ぶ楽しさがあつたり、買い回りに便利だつたりと、魅力的であると考えられるためである。

以上を定式化すると、次の式が得られる。

$$p_{ij} = \frac{\frac{D_j}{d_{ij}^\lambda}}{\sum_{k=1}^n \frac{D_k}{d_{ik}^\lambda}}$$

計算例は資料参照。このモデルは、商圈や施設利用圏の簡明なモデルとして多用される。また、この方法によって、内部一貫性問題は解決される。ただし、地図パターン問題は解決されない。

ハフモデルの理論的根拠としては、後述のロジットモデルによるものや、本間ら (2012) による効用最大化によるものがある。

なお、基本的な Huff モデルでは確率は距離 d_{ij} の λ 乗に反比例するが、これを距離 d_{ij} の指数関数 $e^{-\lambda d_{ij}}$ に反比例すると変更したモデルも考えられる (栗田, 2002)。

6 エントロピー最大化モデル

エントロピー最大化モデル (entropy maximization model) は, A. G. Wilson (1967) が提案した. その地理学では斬新な方法論によって地理学に大きな衝撃を与えた.

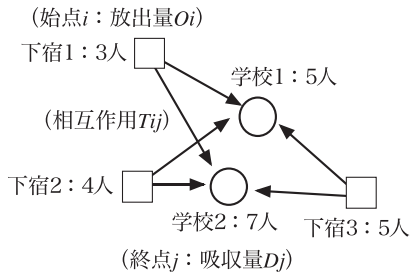


図 10: Wilson のモデル

6.1 場合の数

Wilson のモデルでは, 最も尤度 (起こりやすさ, likelihood) が大きい, つまり「場合の数」が多い相互作用が実現すると考える. たとえば 12 人の学生が表のように 3 箇所の下宿 (始点) から 2 箇所の学校 (終点) に通っているとする. このような表を起終点表 (あるいは起終点行列), OD 表 (OD 行列), origin destination table (origin destination matrix) と呼ぶ.

表 1: 下宿と学校の組み合わせ

	通学パターン 1		通学パターン 2	
	学校 1	学校 2	学校 1	学校 2
(定員)	(5 人)	(7 人)	(5 人)	(7 人)
下宿 1 (3 人)	2 人	1 人	0 人	3 人
下宿 2 (4 人)	2 人	2 人	0 人	4 人
下宿 3 (5 人)	1 人	4 人	5 人	0 人

12 人の学生が好き好きに下宿と学校を選ぶ組み合わせの総数は, 組み合わせ理論, combinatorics から 21,954,240 通りである. そのうち, 表の通学パターン 1 が生じる組み合わせは 2,494,800 通りあるのに対して, パターン 2 は 27,720 通りしかない. したがってパターン 2 よりパターン 1 が圧倒的に実現しやすい.

実際の計算では, 場合の数の対数を取ってからその最大値を求める方が簡単である. 場合の数の

対数はいわゆる情報エントロピー, entropy in information theory になるので, Wilson のモデルはエントロピー最大化モデルと呼ばれる.

6.2 Wilson の定式化

基本的なモデルでは, 総学生数 T , 下宿 i (始点) の居住者数 (出発量) O_i , 学校 j (終点) の学生数 (到着量) D_j , 全学生の総移動コスト C が一定と仮定して, 場合の数が最大となるように, i から j への通学者数 (相互作用) T_{ij} が実現すると考える. そこでこのモデルを, 発生・吸収制約モデル, production-attraction-constrained model, または二重制約モデル, doubly constrained model と呼ぶ.

まず制約条件を定式化しよう. 下宿 i から学校 j までの移動コストを C_{ij} とする. 上記の定義から,

$$\begin{aligned} O_i &= \sum_j T_{ij} && \text{下宿 } i \text{ 居住者数一定} \\ D_j &= \sum_i T_{ij} && \text{学校 } j \text{ 学生数一定} \\ T &= \sum_{ij} T_{ij} && \text{総学生数一定} \\ C &= \sum_{ij} C_{ij} T_{ij} && \text{総移動コスト一定} \end{aligned}$$

となる. ここで, すべての T_{ij} を並べた OD 行列

		学校 1	学校 2	学校 3	...
(定員)		(D_1)	(D_2)	(D_3)	...
下宿 1	(O_1)	T_{11}	T_{12}	T_{13}	...
下宿 2	(O_2)	T_{21}	T_{22}	T_{23}	...
下宿 3	(O_3)	T_{31}	T_{32}	T_{33}	...
...

を考え, 特定の OD 行列が実現する場合の数 Z を算出する. この数は, 組み合わせの理論により, T から, 順次 T_{ij} を取り出してゆくの, その組み合わせの数すべてを掛け合わせた数になる.

$$\begin{aligned} Z &= \binom{T}{T_{11}} \binom{T - T_{11}}{T_{12}} \\ &\quad \binom{T - T_{11} - T_{12}}{T_{13}} \dots \\ &= \frac{T!}{T_{11}!(T - T_{11})!} \frac{(T - T_{11})!}{T_{12}!(T - T_{11} - T_{12})!} \\ &\quad \frac{(T - T_{11} - T_{12})!}{T_{13}!(T - T_{11} - T_{12} - T_{13})!} \dots \\ &= \frac{T!}{\prod_{ij} T_{ij}} \end{aligned}$$

この Z を最大化する T_{ij} を求めればよいのだが, そのままでは難しいので, Z の対数を取って, ス

ターリングによる近似式 ($\ln n! \approx n \ln n - n$) を適用すると、次式が得られる.

$$\begin{aligned} \ln Z &\approx T \ln T - T - \sum_{ij} T D_{ij} \ln T_{ij} + \sum_{ij} T_{ij} \\ &= T \ln T - \sum_{ij} T_{ij} \ln T_{ij} \end{aligned}$$

ここで制約条件を考慮した最大化を行うため、ラグランジュの未定乗数法, the method of Lagrange multipliers を適用する. これは, 最大化すべき関数に, 未定乗数を掛け合わせた制約条件式を足し合わせたもの (ラグランジュ関数) を, 最大化すれば, 元の関数の最大化が可能である, という方法である. ここでのラグランジュ関数 L は, 制約条件に対する未定乗数を λ_i, ν_j, β と書けば,

$$\begin{aligned} L &= T \ln T - \sum_{ij} T_{ij} \ln T_{ij} && Z \text{ の対数} \\ &\quad - \sum_i \lambda_i \left(\sum_j T_{ij} - O_i \right) && \text{居住者数} \\ &\quad - \sum_j \nu_j \left(\sum_i T_{ij} - D_j \right) && \text{学生数} \\ &\quad - \beta \left(\sum_{ij} C_{ij} T_{ij} - C \right) && \text{総移動コスト} \end{aligned}$$

となる. 最大化のため, これを T_{ij} で偏微分して 0 と置けば,

$$\frac{\partial L}{\partial T_{ij}} = -\ln T_{ij} - \lambda_i - \nu_j - \beta C_{ij} = 0$$

となり, これを T_{ij} について解けば,

$$T_{ij} = e^{-\lambda_i - \nu_j - \beta C_{ij}}$$

が得られる. 制約条件を用いて λ_i, ν_j を消去すれば,

$$T_{ij} = A_i B_j \frac{O_i D_j}{e^{\beta C_{ij}}}$$

となる. ただし, 係数の定義は次の通りである.

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{1}{\sum_j B_j D_j e^{-\beta C_{ij}}} \\ B_j &= \frac{1}{\sum_i A_i O_i e^{-\beta C_{ij}}} \end{aligned}$$

7 競合着地モデル

競合着地モデル, competing destinations model は, Fotheringham (1983) による, 地図パターン問題を避けるために考案されたモデルである.

たとえば東京都立大学から酒を飲みに行くときに南大沢, 新宿などの地域を選んでから店を決めるとする. すると個々の店が選ばれる可能性は, 極めて多くの店が競合する新宿では従来の空間的相

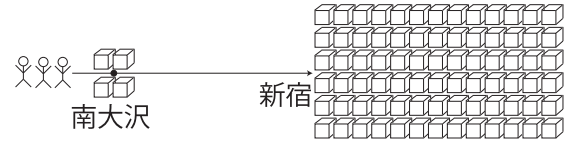


図 11: 競合着地モデル

相互作用モデルによる予想よりも低く, 逆に店が数軒しかない南大沢では高い.

この目的地の競合をモデルに組み込むため, 周囲の競合する飲み屋の影響力を数式に付け加える. 定式化と実例は資料を参照.

8 ロジットモデル

ロジットモデル (logit model) はもともとは交通需要モデルとして交通計画で発達した. 個人が効用 U_i を最大化すべく選択肢 (alternative) A_j を選択するとして, 選択行動を確率モデルで表す.

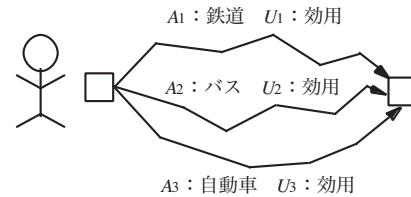


図 12: ロジットモデル

8.1 決定的選択理論

もし $U_1 > U_2$ かつ $U_1 > U_3$ ならば必ず A_1 (鉄道) を選ぶと考えるのが決定的選択理論である. これは現実には必ずしも成立しない.

8.2 確率的選択理論

A_1 と A_2 は確率 P_1 と P_2 で選択される. 次のふたつの考え方が代表的である.

定数効用アプローチ constant utility approach. 効用 U_i は一定であり, 選択は確率である.

ランダム効用アプローチ random utility approach. 効用 U_i が確定的な項 V_i と, 確率的に変動する誤差項 ϵ_i の合算になる. 選択は効用の大きい方になる.

8.3 ロジットモデル

定数効用アプローチ, ランダム効用アプローチの両方から導き出される. たとえば, ランダム効用アプローチにおいて, 選択肢がふたつある場合を考えよう.

$$\begin{aligned} P_1 &= Pr[U_1 > U_2] \\ &= Pr[V_1 + \epsilon_1 > V_2 + \epsilon_2] \\ &= Pr[V_1 - V_2 > \epsilon_2 - \epsilon_1] \end{aligned}$$

ここで, 誤差項 ϵ_i は互いに独立に正規分布 (normal distribution) に従うと考えると, プロビットモデル (probit model) と呼ばれるモデルが導出されるが, 取り扱いが難しい. そこで, 誤差項 ϵ_i は互いに独立に正規分布に似たガンベル分布 (Gumbel distribution) に従うと考えると, 次式のロジットモデルが導出される. この式の形は, 一般にロジスティック関数 (logistic function) と呼ばれるものである.

$$P_1 = \frac{e^{V_1}}{e^{V_1} + e^{V_2}}$$

ここで, 選択肢が距離や魅力の異なる施設と考えよう. 効用の確定的な項 V_i が魅力の増加関数であり, また距離の線型減少関数 (linearly decreasing function) であると仮定すると, 空間的相互作用モデルが導出できる. すなわち, 施設 i の魅力を α_i , 利用者から施設 i までの距離 d_i が 1 単位増えたときの効用の減少量を β とする. 単純に

$$V_i = \alpha_i - \beta d_i$$

と, 効用が魅力の線形増加, 距離の線形減少関数となっているとすれば, 確率は,

$$P_1 = \frac{1}{\frac{e^{\alpha_1}}{e^{\beta d_1}} + \frac{e^{\alpha_2}}{e^{\beta d_2}}} \frac{e^{\alpha_1}}{e^{\beta d_1}}$$

となり, 空間的相互作用モデル (特にハフモデルに近い) が得られる.

引用文献 (資料とも)

- 1) 石川義孝 (1988) 空間的相互作用モデル, 地人書房
- 2) 栗田治 (2002) 輸送機関の発達と地域の商業売上に与える影響, 都市計画論文集, 37, 55-60
- 3) 建築計画教科書研究会 (1989) 建築計画教科書, 彰国社
- 4) 下総薫監訳 (1987) 都市解析論文選集, 古今書院 (以下の文献の*は本書に和訳を収録)
- 5) 杉浦芳夫 (1989) 立地と空間的行動, 古今書院

6) 鈴木淳ほか (2002) 利用者の選好に立脚した通所型高齢者施設の利用構造と配置の分析, 日本建築学会大会学術講演梗概集, F-1 分冊, pp649-650

7) 野上道男ほか (1986) パソコンによる数理地学演習, 古今書院

8) 谷村秀彦ほか (1986) 都市計画数理, 朝倉書店

9) 肥田野登 (2000) 入門社会学, 日本評論社

10) デイビッド・フット (1984) 都市モデル-手法と応用, 丸善

11) 本間健太郎ほか (2012) 消費者行動に着目したハフモデルの新しい導出方法, 都市計画論文集, 46-3, 865-870

12) 新谷洋二 (1993) 都市交通計画, 技報堂出版, 92-95

13) 古山正雄 (2000) ハフモデルと介在機会モデルの相互互換条件, 都市計画論文集, No.35, pp.1045-1050

14) 梅林ほか (1997) ニュータウンにおける商業施設の選択行動への競合着地モデルの適合性, 日本建築学会計画系論文集, 491, 109-115

15) 森川高行ほか (2004) 新交通システム需要予測の事後評価-ビーチライナーを例として-, 運輸政策研究, ? Vol.7, No.2, 20-29

16) H. C. Carey, (1858-1859) *Principles of Social Science*, Philadelphia, Lippincott

17) A.S. Fotheringham (1983) A new set of spatial-interaction models: the theory of competing destinations, *Environment and Planning A*, 15, pp.15-36

18) R. A. Garin (1966) A matrix formulation of the Lowry model for inter-metropolitan activity location, *Journal of the American Institute of Planners*, 32, 361-4

19) B. Harris* (1964) A note on the probability of interaction at a distance, *Journal of Regional Science*, 5, pp.31-35.

20) D. L. Huff (1963) A probabilistic analysis of shopping center trade areas, *Land Economics*, 39, pp.81-90

21) I. S. Lowry (1964) A model of metropolis, RM-4035-RC, RAND Corporation, Santa Monica, California

22) J. H. Niedercorn, et al *(1969) An economic derivation of the "gravity law" of spatial interaction, *Journal of Regional Science*, 9, pp.273-282

23) E. G. Ravenstein* (1885) The laws of migration, *Journal of the Royal Statistical Society*, 48, pp.167-227

24) W. J. Reilly (1931) *The Law of Retail Gravitation*

25) S. A. Stouffer* (1940) Intervening opportunities: a theory relating mobility and distance, *American Sociological Review*, 5, pp.845-867

26) A. G. Wilson* (1967) A statistical theory of spatial distribution models, *Transportation Research*, 1, 253-269

27) G. K. Zipf (1946) The $P_1 P_2 / D$ hypothesis: on the intercity movement of persons, *American Sociological Review*, 11, pp.677-686

28) G. K. Zipf (1946) Some determinants of the circulation of information, *American journal of Psychology*, 59, pp.401-421