

注意

自然数は 1 以上の整数とする. 自然数全体, 実数全体の集合をそれぞれ \mathbb{N} , \mathbb{R} で表す. 集合 X, Y に対して, X と Y の差集合を $X - Y$, X と Y の直積を $X \times Y$, X のべき集合を $\mathcal{P}(X)$ でそれぞれ表す. 全体集合 U の部分集合 X に対して, X の補集合を \overline{X} で表す. 命題 P, Q に対して, P の否定を $\sim P$, P と Q の排他的選言 (排他的論理和) を $P \oplus Q$ でそれぞれ表す. その他, 記号・用語等は講義内で説明したものに従うものとする.

問題

1. $U = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq 10\}$ を全体集合とする. U の部分集合

$$A = \{1, 2, 4, 6, 7, 10\}, \quad B = \{3, 5, 8, 9, 10\}, \quad C = \{1, 2, 3, 4\}$$

に対して, 次の各集合を求め, 要素を列挙して表せ.

$$(a) (A \cap B) \cup C \quad (b) (A - B) - C \quad (c) \overline{\overline{A} \cup B \cup C}$$

2. 集合 $A = \{1, 3, 5\}, B = \{2, 3, 5\}, C = \{7, 8, 9\}$ に対して, 次の各集合を求め, 要素を列挙して表せ.

$$(a) (A \times C) \cup (B \times C) \quad (b) \mathcal{P}(C)$$

3. P, Q, R を命題とする. 次の論理式の真理値表を作成せよ.

$$(a) (P \wedge (R \vee Q)) \oplus R \quad (b) (P \vee Q) \rightarrow (P \vee R) \quad (c) P \rightarrow (Q \rightarrow (\sim R))$$

4. (a)–(c) の写像について, (i)–(iv) のいずれに当てはまるか理由とともに答えよ.

$$(a) f_1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}; f_1(x) = 2x.$$

$$(b) f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f_2(x) = x^2.$$

$$(c) f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f_3(x) = 3x + 4.$$

- (i) 全単射である. (ii) 単射であるが全射でない.
(iii) 全射であるが単射でない. (iv) 単射でも全射でもない.

5. $A = \{1, 2, 3\}, B = \{4, 5, 6, 7\}, C = \{8, 9, 10\}$ とする. A から B への関係 R および B から C への関係 S を

$$R = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 7), (3, 5), (3, 7)\},$$

$$S = \{(5, 8), (6, 9), (7, 8), (7, 10)\}$$

で定める. 以下の問いに答えよ.

- (a) R の逆関係 R^{-1} を求め, 要素を列挙して表せ.

- (b) R と S の合成関係 $R \cdot S$ を求め, 要素を列挙して表せ.

6. すべての自然数 n に対して $4^n \geq n^2$ が成り立つことを n に関する数学的帰納法で示せ.