

12 平方剰余の相互法則

問題

解答に際して、その問題より前にある問題の結果を用いてもよい。記号 $\left(\frac{m}{n}\right)$ はルジャンドル記号またはヤコビ記号を表す。

12-1. ルジャンドル記号 $\left(\frac{71}{571}\right)$ の値を求めよ。

12-2. ヤコビ記号 $\left(\frac{361}{667}\right)$ の値を求めよ。

12-3. p を 5 以上の素数とする。 $\left(\frac{3}{p}\right) = 1$ であるための必要十分条件は $p \equiv 1, 11 \pmod{12}$ であることを示せ。

12-4. p を素数として、 $p \equiv 1, 11 \pmod{12}$ であるとする。このとき、3 は p を法とする原始根でないことを示せ。

12-5. 素数 p と整数 a は $p \equiv 3 \pmod{4}$, $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$ を満たすとする。このとき、 $x \equiv a^{(p+1)/4} \pmod{p}$ を満たす整数 x に対して、 $x^2 \equiv a \pmod{p}$ が成り立つことを示せ。

12-6. 合同式 $x^2 \equiv 2 \pmod{31}$ を満たす整数 x で、 $0 \leq x < 31$ を満たすものをすべて求めよ。

12-7. $\left(\frac{a}{21}\right) = 1$ であるが $x^2 \equiv a \pmod{21}$ が解を持たない整数 a を一つ求めよ。