アルゴリズム B 演習 第 10 回

2023 年 12 月 11 日

10　ユークリッドの互除法

問題

解答に際して，その問題より前にある問題の結果を用いてもよい．計算量の評価の際，乗除算は筆算と同様に行うものとする．自然数 a, b に対して，a と b の最小公倍数を $\mathrm{lcm}(a,b)$ で表す．

10-1. ユークリッドの互除法を用いて $\gcd(2584, 1330)$ を求めよ．

10-2. 任意の自然数 a, b に対して，$ab = \gcd(a,b)\,\mathrm{lcm}(a,b)$ が成り立つことを示せ．

10-3. $\mathrm{lcm}(406, 252)$ を求めよ．

10-4. $a \geq b$ を満たす自然数 a, b が与えられたとき，$\mathrm{lcm}(a,b)$ はビット演算量 $O(\log^3 a)$ で計算できることを示せ．

10-5. 方程式 $95X + 74Y = 1$ の整数解 (X, Y) を 1 組求めよ．

10-6. 合同式 $43X \equiv 68 \pmod{73}$ を満たす整数 X で，$0 \leq X < 73$ を満たすものをすべて求めよ．

10-7. 方程式 $35X + 14Y + 10Z = 1$ の整数解 (X, Y, Z) を 1 組求めよ．

10-8. 連立合同式

$$\begin{cases} X \equiv 21 \pmod{71}, \\ X \equiv 47 \pmod{81} \end{cases}$$

を満たす整数 X で，$0 \leq X < 71 \cdot 81$ を満たすものをすべて求めよ．

10-9. 連立合同式

$$\begin{cases} X \equiv 5 \pmod{6}, \\ X \equiv 2 \pmod{7}, \\ X \equiv 7 \pmod{17} \end{cases}$$

を満たす整数 X で，$0 \leq X < 6 \cdot 7 \cdot 17$ を満たすものをすべて求めよ．