アルゴリズム B 演習 第 2 回

2023 年 10 月 16 日

2　アルゴリズムと計算量

問題

解答に際して，その問題より前にある問題の結果を用いてもよい．実数 x に対して，$\lfloor x \rfloor$ で x 以下の最大の整数を，$\lceil x \rceil$ で x 以上の最小の整数をそれぞれ表す．

2-1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4 = O(n^5)$ が成り立つことを示せ．

2-2. $r > 1$ とする．$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{r^{2k} + r^k + 1} = O(r^n)$ が成り立つことを示せ．

2-3. 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 6, \quad a_2 = 12, \quad a_{n+2} = 2a_{n+1} + 8a_n$$

で定義する．このとき，$a_n = O\left(4^n\right)$ が成り立つことを示せ．

2-4. 数列 $\{T(n)\}$ を

$$T(1) = 0, \quad T(n) = T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1 \quad (n \geq 2)$$

で定義する．$T(n) = O(\log n)$ が成り立つことを示せ．

2-5. 数列 $\{T(n)\}$ を

$$T(1) = 1, \quad T(n) = 2T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n \quad (n \geq 2)$$

で定義する．

(a) 非負整数 k に対して，$T(2^k)$ を k の式で表せ．

(b) 数列 $\{T(n)\}$ は広義単調増加であることを示せ．

(c) $T(n) = O(n \log n)$ が成り立つことを示せ．

2-6. 数列 $\{T(n)\}$ を

$$T(1) = T(2) = 1, \quad T(n) = 4T\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) + n \quad (n \geq 3)$$

で定義する．このとき，$T(n) = O(n^{\log_3 4})$ が成り立つことを示せ．

以下の問題では，計算量を評価するとき，四則演算や比較は定数時間で計算できるとする．

2-7. 次のアルゴリズムは，与えられた自然数 a, n に対して，$x^2 + y^2 \equiv a \pmod{n}$ を満たす整数 x, y が存在するかどうか判定し，存在するときは x, y を返す．

SumOfTwoSquares(a, n)
　for $x = 0$ **to** $n - 1$
　　for $y = x$ **to** $n - 1$
　　　if $x^2 + y^2 \equiv a \pmod{n}$ **then return**(x, y)
　return("存在しない")

このアルゴリズムの最悪計算量の漸近評価を求め，$O(\cdot)$ の形で表せ．

2-8. 次のアルゴリズムは, 与えられた長さ n の整数の配列 a と整数 x に対して, $a[i_1]+a[i_2]+\cdots+a[i_k]=x$ となる添字 $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$ が存在するかどうか判定し，存在するときは **true**，存在しないときは **false** を返す．ただし，$k=0$ のときは $a[i_1]+a[i_2]+\cdots+a[i_k]=0$ と解釈する．

```
SubsetSum(a[ ], n, x)
    if n = 0 then
        if x = 0 then
            return(true)
        else
            return(false)
    if SubsetSum(a[ ], n − 1, x) or SubsetSum(a[ ], n − 1, x − a[n]) then
        return(true)
    else
        return(false)
```

このアルゴリズムの最悪計算量の漸近評価を求め，$O(\cdot)$ の形で表せ．