

1 イントロダクション及びガイダンス

問題

解答に際して、その問題より前にある問題の結果を用いてもよい。アルゴリズムを回答する際は、擬似コードで回答するか、C 言語や Python などのプログラミング言語で回答すること。

1-1. 再帰呼び出しを用いて自然数 n の階乗 $n!$ を求めるアルゴリズムを示せ。

1-2. 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 3, \quad a_{n+2} = 10a_{n+1} + 2a_n \quad (n \geq 0)$$

で定義する。再帰呼び出しを用いて a_n を求めるアルゴリズムを示せ。

1-3. 関数 $f(n), g(n), h(n)$ が $f(n) = O(h(n)), g(n) = O(h(n))$ を満たすとする。このとき、

$$f(n)g(n) = O(h(n)^2)$$

が成り立つことを示せ。

1-4. 関数 $f(n), g(n)$ を考える。ある非負整数 N が存在して、 $n \geq N$ を満たす任意の非負整数 n に対して、 $f(n) \geq 0, g(n) > 0$ が成り立つとする。有限な極限值

$$M = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)}$$

が存在するならば、 $f(n) = O(g(n))$ が成り立つことを示せ。(逆は成り立たないことに注意せよ。)

1-5. 関数 $f(n), g(n)$ を考える。ある非負整数 N が存在して、 $n \geq N$ を満たす任意の非負整数 n に対して、 $f(n) \geq 0, g(n) > 0$ が成り立つとする。このとき、以下は同値であることを示せ。

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$.

(b) $f(n) = o(g(n))$.

1-6. 次の式が成り立つことを示せ。

(a) $n^3 + 2n^2 + 3n + 4 = O(n^3)$.

(b) $\log(n^2 + 2n + 3) = o(n)$.

1-7. 次の式が成り立つことを示せ。

(a) $4n + 5(\log n)^2 = O(n)$.

(b) $e^{\sqrt{\log n \log \log n}} = o(e^n)$.

1-8. $f(n)$ を最高次係数が正である実数係数 k 次多項式とする。このとき、 $f(n) = \Theta(n^k)$ が成り立つことを示せ。