

注意

- 第 1 問から第 4 問は答えのみ解答すればよい.
- 第 5 問から第 8 問は, 答えだけでなく, どのような計算・議論をしたか分かるように詳しく書くこと.

問題

1. 次の関数の漸近評価を求め, $O(\cdot)$ によって表せ.

(a) $f_1(n) = 2n^8 + 5n^5 + 3n^4 + n^2$.

(b) $f_2(n) = \sum_{k=1}^n k(k+2)$.

2. 空のキューに対し, 次の操作を行ったときの過程を図示せよ.

ENQUEUE(4) → ENQUEUE(2) → ENQUEUE(7) → DEQUEUE → ENQUEUE(5) →
DEQUEUE → ENQUEUE(1) → DEQUEUE → ENQUEUE(8)

3. 次の整数列をヒープソートで昇順にソートし, その経過を図示せよ.

81, 10, 24, 91, 73

4. 整数列

52, 37, 31, 19, 48, 64, 12, 22

を次のアルゴリズムで昇順にソートし, その経過を図示せよ.

(a) 挿入ソート

(b) マージソート

5. 以下の問いに答えよ.

(a) 方程式 $69X + 41Y = 1$ の整数解 (X, Y) を 1 組求めよ.

(b) 合同式 $41X \equiv 10 \pmod{69}$ を満たす整数 X で, $0 \leq X < 69$ を満たすものをすべて求めよ.

6. $b = 3, 6$ のそれぞれに対して, 35 は b を底とする擬素数かどうか判定せよ.

7. フェルマー法を用いて 5183 を素因数分解せよ.

8. n を 2 以上の自然数, $n = \prod_{i=1}^r p_i^{e_i}$ を n の素因数分解とする. ただし, p_1, p_2, \dots, p_r は相異なる素数, e_1, e_2, \dots, e_r は自然数とする. 以下の問いに答えよ.

(a) $\sum_{i=1}^r e_i \leq \log_2 n$ が成り立つことを示せ.

(b) $n, p_1, p_2, \dots, p_r, e_1, e_2, \dots, e_r$ を入力として, オイラー関数 $\varphi(n)$ をビット演算量 $O(\log^3 n)$ で計算できることを示せ. ただし, 四則演算のビット演算量は以下の通りとする.

- k ビット以下の 2 つの整数の加減算のビット演算量は高々 k である.
- k ビットの整数と l ビットの整数の乗算のビット演算量は高々 kl である.
- k ビットの整数を l ビットの整数で割り商と剰余を得る除算のビット演算量は高々 kl である.