

## 9 自然数の四則演算・高速冪乗計算

### 位取り記数法

$b$  を 2 以上の整数とする. 自然数  $n$  が

$$n = \sum_{i=0}^{m-1} a_i b^i \quad (m \text{ は自然数, } a_i \in \{0, 1, \dots, b-1\}, a_{m-1} \neq 0)$$

を満たすとき,  $n = (a_{m-1} \dots a_1 a_0)_b$  と表す. この記数法を  **$b$  進法** ( $b$ -ary system, base- $b$  system) といい,  $b$  を底 (base) または基数 (radix) という. 通常用いられるのは **10 進法** (decimal system) であり, 計算機を扱う際は **2 進法** (binary system), **8 進法** (octal system), **16 進法** (hexadecimal system) もよく用いられる. 16 進法では, 10, 11,  $\dots$ , 15 を A, B,  $\dots$ , F または a, b,  $\dots$ , f で表すことが多い.

### 自然数の四則演算

自然数の四則演算の計算量について考える. 計算量を測るには様々なモデルが用いられ, 精密な評価の際には多テープチューリング機械などが用いられるが, ここではより単純なビット演算量を用いる.

■**加算** 2 進法で表された 2 つの自然数の加算を考える.  $k$  ビット (2 進法で  $k$  桁) の自然数の加算は, 次の操作を  $k$  回繰り返すことで行われる.

- 足されるビット  $x$ , 足すビット  $y$ , 下の桁からの繰上ビット  $z$  に対して,

$$x + y + z = 2c + r$$

によって, 足した結果ビット  $r$ , 上の桁への繰上ビット  $c$  を定める. ( $x, y, z, r, c \in \{0, 1\}$  とする.)

このビット演算を単位として求めた計算量をビット演算量 (bit complexity) という. したがって, 高々  $k$  ビットの 2 つの自然数の加算のビット演算量は高々  $k$  である.

■**減算** 高々  $k$  ビットの 2 つの自然数の減算は, 高々  $k$  のビット演算量でできる. ただし, ビット演算は次の操作とする.

- 引かれるビット  $x$ , 引くビット  $y$ , 下の桁からの繰下ビット  $z$  に対して,

$$2c + x - y - z = r$$

によって, 引いた結果ビット  $r$ , 上の桁への繰下ビット  $c$  を定める. ( $x, y, z, r, c \in \{0, 1\}$  とする.)

■**乗算**  $k$  ビットの自然数と  $l$  ビットの自然数の乗算は, 筆算と同様に行うと, 高々  $kl$  のビット演算量でできる. ここで, 桁をずらす操作の計算量は小さいので無視している.

■**除算**  $k$  ビットの自然数を  $l$  ビットの自然数で割って商と剰余を求める計算は, 筆算と同様に行うと, 高々  $kl$  のビット演算量でできる.

以上をまとめると、高々  $n$  ビットの 2 つの自然数について、加減算は  $O(n)$  のビット演算量で、乗除算は  $O(n^2)$  のビット演算量で実行できる。また、0 以下の整数も含めた整数の四則演算についても、符号を適切に扱うことで同じ計算量となる。

## カラツバ法

筆算より高速な自然数の乗算アルゴリズムにカラツバ法 (Karatsuba method) がある。

$x, y$  を高々  $n$  ビットの自然数とする。  $m = \lceil n/2 \rceil$  として、

$$x = a2^m + b, \quad y = c2^m + d, \quad 0 \leq a, b, c, d < 2^m$$

と表す。このとき、

$$xy = ac2^{2m} + ((a+b)(c+d) - ac - bd)2^m + bd$$

となるから、 $xy$  を計算するには 3 回の乗算  $ac, bd, (a+b)(c+d)$ 、桁をずらす操作、加減算を行えばよい。これを再帰的に繰り返すことで自然数の乗算を行うことができる。全体のビット演算量は  $O(n^{\log_2 3})$  になることが証明できる。  $\log_2 3 = 1.58\dots$  だから、これは筆算より漸近的に高速である。

注意。さらに高速な乗算アルゴリズムも知られている。以下では、多テープチューリング機械によって計算量を評価し、高々  $n$  ビットの 2 つの自然数の乗算を考える。1971 年、Schönhage, Strassen は、高速フーリエ変換 (FFT) を用いることで、計算量  $O(n \log n \log \log n)$  の乗算アルゴリズムを構成した。2007 年、Fürer はこの上界を改善することに初めて成功し、計算量を  $n \log n 2^{O(\lg^* n)}$  とした\*1。2019 年には Harvey, van der Hoeven が計算量  $O(n \log n)$  の乗算アルゴリズムを構成した\*2。

また、除算についても、ニュートン法を用いることで乗算の定数倍の計算量で計算できる。

## 高速冪乗計算

$x$  を乗法の定義された代数系 (正確には半群) の要素、 $n$  を自然数として、 $x^n$  の計算を考える。素朴な方法は、順に  $x^2, x^3, \dots, x^n$  と、 $x$  による乗算を  $n-1$  回繰り返す方法である。乗算回数がより少ない方法を以下で述べる。 $n$  を 2 進法で  $n = (n_k \dots n_1 n_0)_2$  と表す。ただし、 $n_k = 1$  とする。

$$x_0 = x, \quad x_i = x_{i-1}^2 = x^{2^i} \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

と定める。この計算は  $k$  回の乗算でできる。このとき、

$$x^n = \prod_{\substack{n_i=1 \\ 0 \leq i \leq k}} x_i$$

によって  $x^n$  が計算できる。

$$\nu(n) = \#\{i \mid n_i = 1, 0 \leq i \leq k\}$$

とおくと、 $x^n$  の計算に必要な乗算の回数は、 $k + \nu(n) - 1$  である。したがって、 $x^n$  の計算は  $O(\log n)$  の乗算で実行できる。この方法を繰り返し 2 乗法 (repeated squaring) という。(繰り返し 2 乗法には、乗算の順序がこれと異なるものもある。)

\*1 2 を底とする対数を  $\lg$  で表し、 $\lg^{(0)} n = n$ ,  $\lg^{(i+1)} n = \lg \lg^{(i)} n$  としたとき、 $\lg^* n = \min\{i \geq 0 \mid \lg^{(i)} n \leq 1\}$  と定義される。

\*2 Fürer の論文は 2009 年に、Harvey, van der Hoeven の論文は 2021 年にそれぞれ出版された。