

## 6 ソートアルゴリズム (1)

以下では、配列  $a[1], a[2], \dots, a[n]$  を昇順に並べ替えるものとして説明する。

### バブルソート

バブルソート (bubble sort) は、隣接している要素の順序が逆のとき交換する操作を繰り返してソートする。アルゴリズムは次のように書ける。ただし、 $\text{swap}(a[i], a[i + 1])$  は  $a[i]$  と  $a[i + 1]$  を交換する操作を表す。

```
1: BUBBLESORT( $a[ ], n$ )
2:   for  $j = 1$  to  $n - 1$ 
3:     for  $i = 1$  to  $n - j$ 
4:       if  $a[i] > a[i + 1]$  then
5:         swap( $a[i], a[i + 1]$ )
```

バブルソートの最悪計算量は  $O(n^2)$  である。

### 挿入ソート

挿入ソート (insertion sort) は、要素を順に正しい位置に挿入することでソートする。詳細は第 2 回で説明した通りである。挿入ソートの最悪計算量は  $O(n^2)$  であるが、入力がほぼソートされているときは高速である。これを利用して、部分列に挿入ソートを用いて高速にしたシェルソート (Shell's sort) が知られている。

### 選択ソート

選択ソート (selection sort) は、最小値を先頭の要素と交換する操作を繰り返すことでソートする。アルゴリズムは次のように書ける。

```
1: SELECTIONSORT( $a[ ], n$ )
2:   for  $i = 1$  to  $n - 1$ 
3:      $min = i$ 
4:     for  $j = i + 1$  to  $n$ 
5:       if  $a[min] > a[j]$  then
6:          $min = j$ 
7:     swap( $a[i], a[min]$ )
```

選択ソートの最悪計算量は  $O(n^2)$  である。

### ヒープソート

ヒープソート (heap sort) は、選択ソートにおける最小値の探索を、ヒープというデータ構造によって高速にしたソートである。ただし、作業領域を節約するため、以下では最小値の代わりに最大値を探索する。

## ヒープ

2分木  $T$  を図示したとき、深さ最大の段は左詰めになっており、それ以外の段はすべて埋まっているとき、 $T$  を（広義の）完全 2 分木 (complete binary tree) という。完全 2 分木  $T$  の各頂点が値を持つとする。 $T$  が **max** ヒープ条件 (max-heap property) 「各頂点の値はその子の値以上である」を満たすとき、 $T$  を **max** ヒープ (max-heap) といい、**min** ヒープ条件 (min-heap property) 「各頂点の値はその子の値以下である」を満たすとき、 $T$  を **min** ヒープ (min-heap) という。また、max ヒープと min ヒープをまとめてヒープ (heap) という。順序を逆にすれば同じ議論が適用できるので、以下では max ヒープのみを考え、単にヒープと呼ぶ。

ヒープの上から順に左から右へ向かって添字  $1, 2, \dots$  を付けることで、ヒープを配列で表現できる。添字  $i$  の頂点の親は添字  $\lfloor i/2 \rfloor$  の頂点であり、左の子は添字  $2i$  の頂点、右の子は添字  $2i + 1$  の頂点である。

ヒープ  $h$  には次の操作を行うことができる。

- **MAXIMUM**( $h$ ):  $h$  に含まれる値の最大値を求める。
- **INSERT**( $h, x$ ):  $x$  を  $h$  に挿入する。
- **EXTRACTMAX**( $h$ ):  $h$  に含まれる値の最大値を返し、その値を持つ頂点を  $h$  から削除する。

これらの操作を持つデータ構造を優先順位付きキュー (priority queue) という。ヒープにおける各操作は以下のように実現できる。**MAXIMUM** の最悪計算量は  $O(1)$  であり、他の操作の最悪計算量は  $O(\log n)$  である。

■ **MAXIMUM**( $h$ ) ヒープ条件から、ヒープの根が最大値であるので、それを返せばよい。

■ **INSERT**( $h, x$ ) まず配列としての末尾に  $x$  を追加する。 $x$  を 2 分木の頂点と見なしたときの親と値を比較し、 $x$  の方が値が大きいとき交換する。この操作を繰り返して交換が起きなくなったとき、ヒープ条件を満たしている。

■ **EXTRACTMAX**( $h$ ) まず **MAXIMUM** と同様に、ヒープの根の値を返す。次にヒープの根を削除し、配列としての末尾にあたる頂点  $x$  を根に移動する。 $x$  が子を持つとき、 $x$  の子が 2 個あれば、それらを比較する。 $x$  の大きい方の子と  $x$  を比較し、 $x$  の方が小さければそれらを交換する。この操作を繰り返して交換が起きなくなったとき、ヒープ条件を満たしている。

## ヒープソート

配列  $a$  の要素をヒープにすべて挿入し、最大値を順に取り出すことで、配列  $a$  をソートすることができる。これをヒープソートという。アルゴリズムは次のように書ける。

```
1: HEAPSORT( $a[ ], n$ )
2:   空のヒープ  $h$  を用意する
3:   for  $i = 1$  to  $n$ 
4:     INSERT( $h, a[i]$ )
5:   for  $i = n$  downto 1
6:      $a[i] =$  EXTRACTMAX( $h$ )
```

空のヒープ  $h$  を用意する代わりに配列の一部  $a[1], a[2], \dots, a[i]$  をヒープと見なすことで、ヒープのための作業領域を使わずにヒープソートを行うことができる。ヒープソートの最悪計算量は  $O(n \log n)$  である。なお、第 3 行、第 4 行のヒープの構成には最悪計算量  $O(n)$  のアルゴリズムも知られている。