

## 離散数学入門 a レポート課題 No. 2

2022 年 7 月 5 日配布

提出日：2022 年 7 月 19 日（火）

### 注意

- 7 月 19 日の講義の際に提出すること。
- レポートの最初に学修番号と名前を記入すること。
- レポートが複数枚にわたるときは、左上をホッチキス等で綴じること。
- A4 レポート用紙を使用すること。

### 問題

以下の問題において、次の記号・用語を用いる。整数全体の集合を  $\mathbb{Z}$  で表す。集合  $X, Y$  に対して、 $X$  と  $Y$  の直積を  $X \times Y$  で表す。その他、記号・用語等は講義内で説明したものに従うものとする。

1. 次の合同式を満たす整数  $x$  をそれぞれ 1 つ求めよ。

(a)  $119x \equiv 1 \pmod{184}$       (b)  $43x \equiv 74 \pmod{97}$

2.  $\mathbb{Z}$  における 2 項演算  $*$  を次の式で定義する。演算  $*$  が結合律を満たすかどうか判定し、満たす場合は証明を与え、満たさない場合は反例を与えよ。

(a)  $x * y = |x + y|$       (b)  $x * y = |xy|$

3. 5 次の対称群  $S_5$  の要素

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, & \sigma_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}, & \sigma_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \\ \sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, & \sigma_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}, & \sigma_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を考える。  $S_5$  の部分群  $H = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5\}$  の演算表を示せ。

4.  $(X; \leq_X), (Y; \leq_Y)$  を全順序集合とする。  $x_1, x_2 \in X$  に対して、  $x_1 \leq_X x_2$  かつ  $x_1 \neq x_2$  であるとき、  $x_1 <_X x_2$  と表す。  $X \times Y$  における関係  $\leq$  を次のように定義する。  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$  に対して、

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \iff x_1 <_X x_2 \text{ または } (x_1 = x_2 \text{ かつ } y_1 \leq_Y y_2)$$

と定義する。このとき、  $\leq$  は  $X \times Y$  における全順序関係であることを示せ。

5.  $(B; \leq)$  をブール代数とする。  $x + y = \sup(\{x, y\})$ ,  $x \cdot y = \inf(\{x, y\})$  として、  $x \in B$  の補元を  $\bar{x}$  で表す。任意の  $x, y$  に対して、

$$\overline{x + y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$$

が成り立つことを示せ。ただし、必要なら補元の一意性を用いてよい。

6. 節点集合  $V$  と辺集合  $E$  が

$$V = \{a, b, c, d, e, f\}, \quad E = \{(a, b), (a, d), (a, f), (b, c), (b, d), (c, d), (d, e), (e, f)\}$$

で与えられる単純無向グラフ  $G = (V, E)$  を考える。以下の問いに答えよ。

- (a)  $G$  を図示せよ。  
(b) 各節点の次数を求めよ。