

離散数学入門 a レポート課題 No. 1

2022年5月17日配布

提出日：2022年5月31日（火）

注意

- 5月31日の講義の際に提出すること。
- レポートの最初に学修番号と名前を記入すること。
- レポートが複数枚にわたるときは、左上をホッチキス等で綴じること。
- A4レポート用紙を使用すること。

問題

以下の問題において、次の記号・用語を用いる。自然数は1以上の整数とする。自然数全体の集合を \mathbb{N} で表す。集合 X, Y に対して、 X と Y の差集合を $X - Y$ 、 X と Y の直積を $X \times Y$ 、 X のべき集合を $\mathcal{P}(X)$ でそれぞれ表す。全体集合 U の部分集合 X に対して、 X の補集合を \bar{X} で表す。命題 P, Q に対して、 P の否定を $\sim P$ 、 P と Q の排他的選言（排他的論理和）を $P \oplus Q$ でそれぞれ表す。その他、記号・用語等は講義内で説明したものに従うものとする。

1. $U = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq 9\}$ を全体集合とする。 U の部分集合

$$A = \{1, 3, 6, 7, 8, 9\}, \quad B = \{1, 2, 3, 4\}, \quad C = \{5, 6, 9\}$$

に対して、次の各集合を求め、要素を列挙して表せ。

$$(a) (A \cup B) \cap (B \cup C) \quad (b) (A - C) \cup (C - A) \quad (c) \bar{A} \cup (\bar{B} \cap \bar{C})$$

2. 集合 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{4, 5\}, C = \{6, 7, 8\}$ に対して、次の各集合を求め、要素を列挙して表せ。

$$(a) A \times B \quad (b) \mathcal{P}(C)$$

3. P, Q, R を命題とする。次の論理式の真理値表を作成せよ。

$$(a) \sim(P \vee \sim Q) \quad (b) (P \oplus Q) \rightarrow (Q \oplus R) \quad (c) ((P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \vee Q) \rightarrow R)$$

4. 命題 P, Q に対して、 $P | Q = \sim(P \wedge Q)$ と定め、これを nand 演算という。以下の問いに答えよ。ただし、(b)–(d) では必要なら式の構成に括弧を用いてもよい。

(a) $P | Q$ の真理値表を作成せよ。

(b) $\sim P$ と真理値が一致する式を P と $|$ のみを用いて構成せよ。

(c) $P \wedge Q$ と真理値が一致する式が $P, Q, |$ のみを用いて構成できることを示せ。

(d) $P \vee Q$ と真理値が一致する式が $P, Q, |$ のみを用いて構成できることを示せ。

5. $X = \{1, 2, 3, 4\}, Y = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ とする。以下の問いに答えよ。

(a) X から Y への異なる単射は何通りあるか求めよ。

(b) Y から X への異なる全射は何通りあるか求めよ。

6. 次の置換 α に対して、 α^n が恒等置換となる最小の自然数 n を求めよ。

$$(a) \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (b) \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$