

注意

自然数は1以上の整数とする. 自然数全体の集合を \mathbb{N} で表す. 集合 X, Y に対して, X と Y の差集合を $X - Y$, X と Y の直積を $X \times Y$, X のべき集合を $\mathcal{P}(X)$ でそれぞれ表す. 全体集合 U の部分集合 X に対して, X の補集合を \bar{X} で表す. 命題 P, Q に対して, P の否定を $\sim P$, P と Q の排他的選言 (排他的論理和) を $P \oplus Q$ でそれぞれ表す. その他, 記号・用語等は講義内で説明したものに従うものとする.

問題

1. $U = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq 10\}$ を全体集合とする. U の部分集合

$$A = \{1, 2, 3, 8\}, \quad B = \{1, 3, 7, 8, 10\}, \quad C = \{3, 4, 6\}$$

に対して, 次の各集合を求め, 要素を列挙して表せ.

$$(a) (A \cup C) \cap (B \cup C) \quad (b) (A - B) \cup (B - A) \quad (c) \overline{(A \cap B) \cup C}$$

2. 集合 $A = \{2, 3, 4\}, B = \{2, 3, 6, 7, 8\}, C = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ に対して, 次の各集合を求め, 要素を列挙して表せ.

$$(a) (A \times B) \cap (A \times C) \quad (b) \mathcal{P}(A)$$

3. P, Q, R を命題とする. 次の論理式の真理値表を作成せよ.

$$(a) (P \oplus R) \wedge (Q \oplus R) \quad (b) (Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R) \quad (c) (\sim P \rightarrow \sim Q) \vee (Q \rightarrow R)$$

4. $X = \{1, 2, 3, 4\}, Y = \{5, 6, 7\}$ とする. 以下の問いに答えよ.

- (a) X から Y への異なる写像は何通りあるか求めよ.
 (b) Y から X への異なる単射は何通りあるか求めよ.
 (c) X から Y への異なる全射は何通りあるか求めよ.
 (d) $X \cup Y$ の上の異なる置換は何通りあるか求めよ.

5. 集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ の上の関係

$$R = \{(1, 1), (1, 3), (3, 3), (3, 5), (4, 4), (5, 3)\}$$

を考える. A の上の関係 S を, $R \cup S$ が A の上の同値関係となるもののうち, S の要素の数が最小であるものとする. 以下の問いに答えよ.

- (a) S を求め, 要素を列挙して表せ.
 (b) A の上の同値関係 $R \cup S$ による $1, 2, 3, 4, 5$ の同値類をそれぞれ求め, 要素を列挙して表せ.

6. n を自然数とする. 次の等式が成り立つことを示せ.

$$(a) \sum_{k=1}^n k {}_n C_k = n 2^{n-1}$$

$$(b) \sum_{k=0}^n ({}_n C_k)^2 = {}_{2n} C_n$$