

注意

- 第 1 問から第 4 問は答えのみ解答すればよい。
- 第 5 問から第 7 問は、答えだけでなく、どのような計算・議論をしたか分かるように詳しく書くこと。
- 配列を解答する際は、 $[38, 10, 82, 75]$ のように表記すること。ただし、空の場所を示す必要がある場合は $*$ で表し、 $[38, 10, *, 82, 75]$ のように表記すること。

問題

1. 次の関数の漸近評価を求め、 $O(\cdot)$ によって表せ。
 - (a) $f_1(n) = 2n^7 + 3n^5 + 5n^3 + 9n^2$.
 - (b) $f_2(n) = n^3 + (\log n)^5 + 2^n$.
2. 空のキューに対して次の操作を行う。キューを長さ 4 の配列で実装したとき、各操作後の配列をそれぞれ示せ。

ENQUEUE(8) → ENQUEUE(1) → DEQUEUE → ENQUEUE(4) → DEQUEUE →
ENQUEUE(3) → ENQUEUE(9) → DEQUEUE → DEQUEUE

3. 大きさ 7 のハッシュ表に整数を格納する。ハッシュ関数を $h(x) = x \bmod 7$ で定める。ただし、 x が 7 の倍数のときは $h(x) = 7$ とする。衝突は開番地法で対処するものとし、衝突した際に空の場所を線形探査法で探索するものとする。空のハッシュ表に対して次の順で要素を挿入したとき、最終的に得られるハッシュ表を配列としてそれぞれ示せ。
 - (a) 21, 11, 9, 16, 19
 - (b) 13, 16, 5, 7, 12
4. 配列

[40, 67, 92, 68, 82, 14, 30, 84]

を次のアルゴリズムで昇順にソートするとき、その経過を示せ。(交換・マージなどの操作ごとに配列の状態を示すこと。)

- (a) 選択ソート
 - (b) マージソート
5. 以下の問いに答えよ。
 - (a) 方程式 $31X + 73Y = 1$ の整数解 (X, Y) を 1 組求めよ。
 - (b) 合同式 $31X \equiv 19 \pmod{73}$ を満たす整数 X で、 $0 \leq X < 73$ を満たすものをすべて求めよ。
 6. $f(x) = x^2 + 1$, $x_1 = 3$ として、 ρ 法により $n = 403$ を素因数分解せよ。
 7. $\varphi(n)$ をオイラーの φ 関数とする。以下の問いに答えよ。
 - (a) $\varphi(616)$ を求めよ。
 - (b) 正の整数 n と n の素因数分解 $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r}$ が与えられているとする。ただし、 p_1, p_2, \dots, p_r は相異なる素数であり、 e_1, e_2, \dots, e_r は正の整数であるとする。このとき、 $\varphi(n)$ をビット演算量 $O((\log n)^3)$ で計算できることを示せ。ただし、四則演算のビット演算量は以下の通りとする。
 - k ビット以下の 2 つの整数の加減算のビット演算量は高々 k である。
 - k ビットの整数と l ビットの整数の乗算のビット演算量は高々 kl である。
 - k ビットの整数を l ビットの整数で割る除算のビット演算量は高々 kl である。