

## 1 イントロダクション及びガイダンス

### アルゴリズム

アルゴリズム (algorithm) とは、問題を解くための (明確に定められた) 手順のことをいう。アルゴリズムには入力 (input) と出力 (output) があり、与えられた入力をもとに出力が生成される。アルゴリズムが正当である (correct) とは、すべての入力に対して常に停止し、その出力が正しいことをいう。

例. ユークリッドの互除法 (Euclidean algorithm) は、最大公約数を求めるアルゴリズムであり、擬似コードを用いて次のように書ける。 ( $a, b$  は非負整数とする。)

```
GCD( $a, b$ )
  while  $b \neq 0$ 
     $r = a \bmod b$ 
     $a = b$ 
     $b = r$ 
  return( $a$ )
```

再帰呼び出しを用いて次のように書くこともできる。

```
GCD( $a, b$ )
  if  $b = 0$  then
    return( $a$ )
  else
    return(GCD( $b, a \bmod b$ ))
```

例. 自然数  $n$  の階乗  $n!$  を求めるアルゴリズムは次のように書ける。

```
FACTORIAL( $n$ )
   $r = 1$ 
  for  $i = 1$  to  $n$ 
     $r = ri$ 
  return( $r$ )
```

### 漸近記法

アルゴリズムの計算量を評価するために、以下の漸近記法が用いられる。  
関数  $f(n), g(n)$  を考える。

- ある実数  $c > 0$  と非負整数  $n_0$  が存在して、任意の非負整数  $n$  に対し、

$$n \geq n_0 \implies 0 \leq f(n) \leq cg(n)$$

が成り立つとき、

$$f(n) = O(g(n))$$

と表す。

- ある実数  $c > 0$  と非負整数  $n_0$  が存在して、任意の非負整数  $n$  に対し、

$$n \geq n_0 \implies f(n) \geq cg(n) \geq 0$$

が成り立つとき、

$$f(n) = \Omega(g(n))$$

と表す。

- $f(n) = O(g(n))$  かつ  $f(n) = \Omega(g(n))$  が成り立つとき、 $f(n) = \Theta(g(n))$  と表す。
- 任意の実数  $c > 0$  に対し、ある非負整数  $n_0$  が存在して、任意の非負整数  $n$  に対し、

$$n \geq n_0 \implies 0 \leq f(n) < cg(n)$$

が成り立つとき、

$$f(n) = o(g(n))$$

と表す。

- 任意の実数  $c > 0$  に対し、ある非負整数  $n_0$  が存在して、任意の非負整数  $n$  に対し、

$$n \geq n_0 \implies f(n) > cg(n) \geq 0$$

が成り立つとき、

$$f(n) = \omega(g(n))$$

と表す。

例.  $f(n) = 2n^2 + 3n + 4$  とする。

- $f(n) = O(n^2)$  かつ  $f(n) = \Omega(n^2)$  である。したがって、 $f(n) = \Theta(n^2)$  である。
- $f(n) = O(n^3)$  でもある。一方、 $f(n) = \Omega(n^3)$  ではない。

例.  $n = o(2^n)$ ,  $2^n = \omega(n)$  である。

注意.

- 一般に、次が成り立つ。

$$f(n) = O(g(n)) \iff g(n) = \Omega(f(n)), \quad f(n) = o(g(n)) \iff g(n) = \omega(f(n)).$$

- 通常の等式とは異なり、 $f(n) = O(g(n))$  を  $O(g(n)) = f(n)$  と書いてはならない。
- $f(n) + O(g(n))$  のように、式の中に漸近記法が現れる場合もある。この場合、 $O(g(n))$  は  $h(n) = O(g(n))$  を満たすある関数  $h(n)$  を表す。他の記号の場合も同様である。
- 他分野では、 $O(g(n))$ ,  $o(g(n))$  の定義において、 $0 \leq f(n) \leq cg(n)$  の代わりに  $|f(n)| \leq c|g(n)|$  とすることもある。