線形代数 I 演習 No. 12

2020 年 7 月 30 日

12　行列式と置換・ベクトルの 1 次独立

問題

12-1. $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ が 1 次独立であることを示せ．

(2) $\boldsymbol{a}_3 = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2$ を満たすスカラー x_1, x_2 を求め，$\boldsymbol{a}_3 \in \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \rangle$ であることを示せ．

12-2. $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ a \end{bmatrix}$ が 1 次従属であるとき，a の値を求めよ．

12-3. n を自然数とする．$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ を n 項列ベクトルとして，$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \ldots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$ とする．σ を n 文字の置換，$\varepsilon(\sigma)$ を σ の符号とする．このとき，

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{\sigma(1)} & \boldsymbol{a}_{\sigma(2)} & \ldots & \boldsymbol{a}_{\sigma(n)} \end{vmatrix} = \varepsilon(\sigma)|A|$$

であることを示せ．

レポート問題（期限：8 月 4 日（火）23:59）

12-a. $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -9 \end{bmatrix}$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ が 1 次独立であることを示せ．

(2) $\boldsymbol{a}_3 = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2$ を満たすスカラー x_1, x_2 を求め，$\boldsymbol{a}_3 \in \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \rangle$ であることを示せ．

12-b. $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ a \end{bmatrix}$ が 1 次従属であるとき，a の値を求めよ．

12-c. n を自然数とする．n 文字の置換 σ に対して，

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

が成り立つことを示せ．ただし，$\varepsilon(\sigma)$ は σ の符号とする．