線形代数 I 演習 No. 4

2020 年 6 月 4 日

4　行列の多項式・トレース・正則行列

問題

4-1. $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ とする．

(1) $f(x) = x^2 - x - 2$ に対し，$f(A)$ を求めよ．

(2) n を自然数とする．$A^n = c_n A + d_n E$ となるスカラー c_n, d_n を求めよ．

(3) $\mathrm{tr}(A^n)$ を求めよ．

4-2. $P = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$, $A = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ とする．

(1) P が直交行列であることを確かめよ．

(2) $B = P^{-1}AP$ を求めよ．

(3) B^{-1} を求めよ．さらに，A^{-1} を求めよ．

レポート問題（期限：6 月 9 日（火）23:59）

4-a. $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ とする．

(1) $A^2 + aA + bE = O$ となるスカラー a, b を求めよ．

(2) n を自然数とする．$A^n = c_n A + d_n E$ となるスカラー c_n, d_n を求めよ．

(3) $\mathrm{tr}(A^n)$ を求めよ．

4-b. A が正則行列ならば，A の随伴行列 A^* も正則であり，$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ であることを示せ．

4-c. A を正方行列とする．$E + A$, $E - A$ が正則ならば，$E - A^2$ も正則であり，

$$(E - A^2)^{-1} = \frac{1}{2}\left((E - A)^{-1} + (E + A)^{-1}\right)$$

であることを示せ．