

離散数学入門 c レポート課題 No. 2
2020 年 7 月 14 日配布
提出期限：2020 年 7 月 28 日（火）23:59

注意

- 自然数は 1 以上の整数とする．自然数 m を法とする合同関係による \mathbb{Z} の商集合を \mathbb{Z}_m で表し，整数 a の同値類を $[a]$ で表す．グラフとして，無向単純グラフのみを考える．その他，記号・用語等は講義内で説明したものに従うものとする．

問題

1. 以下の問いに答えよ.
 - (a) \mathbb{N} 上の演算 $*$ を $a * b = \max\{a, b\}$ で定める．このとき， \mathbb{N} は演算 $*$ に関してモノイドであることを示せ．
 - (b) \mathbb{N} 上の演算 \circ を $a \circ b = \min\{a, b\}$ で定める．このとき， \mathbb{N} は演算 \circ に関して半群であるがモノイドではないことを示せ．
2. \mathbb{Z}_6 は加法に関してアーベル群である．このとき， $H = \{[0], [2], [4]\}$ が \mathbb{Z}_6 の部分群であることを示せ．
3. 可換体 \mathbb{Z}_{83} において， $[52]$ の乗法に関する逆元を求めよ．
4. 自然数 n に対し， D_n を n の正の約数全体の集合とする． D_n は整除関係で半順序集合となり，さらに束になる． $a, b \in D_n$ に対し， $a \vee b = \sup\{a, b\}$ ， $a \wedge b = \inf\{a, b\}$ と定める（ \sup ， \inf はそれぞれ整除関係に関する上限，下限である）．以下の問いに答えよ.
 - (a) D_{30} は演算 \vee ， \wedge に関してブール代数である． D_{30} において， 2 の補元を求めよ．
 - (b) D_{12} は演算 \vee ， \wedge に関してブール代数ではないことを示せ．
5. 点集合 V と辺集合 E が以下で与えられるグラフ $G = (V, E)$ を図示せよ.
 - (a) $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ， $E = \{\{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\}$ ．
 - (b) $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ， $E = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 6\}, \{2, 3\}, \{2, 6\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}\}$ ．
6. 完全 2 部グラフ $K_{3,4}$ について以下の問いに答えよ.
 - (a) $K_{3,4}$ における最長の道の長さを求めよ．
 - (b) $K_{3,4}$ における最長の閉路の長さを求めよ．