

離散数学入門 c レポート課題 No. 1
2020 年 6 月 23 日配布
提出期限：2020 年 7 月 7 日（火）23:59

注意

- 自然数は 1 以上の整数とする。集合 X, Y に対して、 X と Y の差集合を $X \setminus Y$ 、 X と Y の直積を $X \times Y$ 、 X のべき集合を 2^X でそれぞれ表す。全体集合 U の部分集合 X に対して、 X の補集合を \overline{X} で表す。その他、記号・用語等は講義内で説明したものに従うものとする。

問題

1. $U = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq 9\}$ を全体集合とする。 U の部分集合

$$A = \{1, 4, 6, 7, 9\}, \quad B = \{2, 4, 5, 7, 8, 9\}, \quad C = \{1, 2, 3, 5, 9\}$$

に対して、次の各集合を求め、要素を列挙して表せ。

$$(a) (A \cap C) \cup (B \cap C) \quad (b) (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \quad (c) \overline{A \cup (B \cap C)}$$

2. 集合 $A = \{1, 2\}, B = \{1, 2, 3, 4\}, C = \{3, 4, 5, 6\}$ に対して、次の各集合を求め、要素を列挙して表せ。

$$(a) A \times B \quad (b) 2^B \cap 2^C$$

3. \mathbb{N}^2 上の関係 \sim を、 $(a, b), (c, d) \in \mathbb{N}^2$ に対して、

$$(a, b) \sim (c, d) \leftrightarrow a + d = b + c$$

で定義する。以下の問いに答えよ。

- (a) \sim は \mathbb{N}^2 上の同値関係であることを示せ。
(b) X を \mathbb{N}^2 の \sim による商集合とする。 $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ が属する同値類を $[(a, b)]$ で表す。写像 $f: X \rightarrow \mathbb{Z}$ を $f([(a, b)]) = a - b$ で定義する。このとき、 f は全単射であることを示せ。（ f の値が代表元の取り方によらないことは認めてよい。）
4. X を \mathbb{R} から \mathbb{R} への関数全体の集合とする。 X 上の関係 R を、 $f, g \in X$ に対して、

$$f R g \leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq g(x)$$

で定義する。以下の問いに答えよ。

- (a) R は X 上の半順序関係であることを示せ。
(b) R は X 上の全順序関係ではないことを示せ。
5. p, q, r を命題変数とする。(a)–(c) の真理値表を作成せよ。

$$(a) p \rightarrow (q \vee r) \quad (b) \neg(\neg p \vee (\neg q \wedge \neg r)) \quad (c) (p \leftrightarrow q) \rightarrow \neg r$$

6. 数列 a_0, a_1, \dots が漸化式

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n \quad (n \geq 0)$$

で定義されているとする。以下の問いに答えよ。

- (a) 母関数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

を求めよ。

- (b) 一般項 a_n を求めよ。