離散数学入門 c 第 6 回 配付資料

2020 年 6 月 16 日

母関数の利用例

$f_1 = 1,\ f_2 = 1,\ f_n = f_{n-2} + f_{n-1}\ (n \geq 3)$ と定義された数列 $f_1, f_2, \ldots$ を**フィボナッチ数列**という．最初の数項は，

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

となる．一般項を母関数を用いて求める．便宜上 $f_0 = 0$ とする．

$$F(x) = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + f_3 x^3 + \cdots$$

とおく．このとき，

$$\begin{aligned} xF(x) &= \quad f_0 x + f_1 x^2 + f_2 x^3 + \cdots, \\ x^2 F(x) &= \qquad\quad f_0 x^2 + f_1 x^3 + \cdots. \end{aligned}$$

$n \geq 2$ に対して $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$ が成り立つから，

$$F(x) - xF(x) - x^2 F(x) = f_0 + f_1 x - f_0 x = x$$

となる．すなわち，

$$(1 - x - x^2) F(x) = x$$

だから，

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

$\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2},\ \beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ とおくと，$1 - x - x^2 = (1 - \alpha x)(1 - \beta x)$ である．よって，

$$F(x) = \frac{x}{(1-\alpha x)(1-\beta x)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1-\alpha x} - \frac{1}{1-\beta x} \right).$$

ここで，

$$\frac{1}{1-\alpha x} = \sum_{i=0}^{\infty} (\alpha x)^i$$

である．β についても同様だから，

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sum_{i=0}^{\infty} (\alpha x)^i - \sum_{i=0}^{\infty} (\beta x)^i \right) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^i - \beta^i) x^i. \end{aligned}$$

ゆえに，

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

となる．