

注意

自然数は 1 以上の整数とする. 集合 X, Y に対して, X と Y の直積を $X \times Y$, X のべき集合を 2^X でそれぞれ表す. 自然数 m を法とする合同関係による \mathbb{Z} の商集合を \mathbb{Z}_m で表し, 整数 a の同値類を $[a]$ で表す. グラフとして, 無向単純グラフのみを考える. その他, 記号・用語等は講義内で説明したものに従うものとする.

問題

1. $X = \{1, 2, 3\}, Y = \{1, 2\}$ とする. 以下の問いに答えよ.
 - (a) $2^X, X \times Y$ を求め, 要素を列挙して表せ.
 - (b) $X \times Y$ から Y への写像のうち, 全射であるものの個数を求めよ.
2. 命題 $P = \lceil \exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N}, y \leq x \rceil$ について以下の問いに答えよ.
 - (a) P の否定を作り, 「 $\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N}, (\text{不等式})$ 」の形で表せ. ただし, \circ, \square は \forall, \exists のどちらかとする.
 - (b) P の真偽を判定し, その理由とともに答えよ.
3. 数列 a_0, a_1, \dots が漸化式

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad a_{n+2} = 7a_{n+1} - 12a_n \quad (n \geq 0)$$

で定義されているとする. 以下の問いに答えよ.

- (a) 母関数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$
 を求めよ.
 - (b) 一般項 a_n を求めよ.
4. 以下の問いに答えよ.
 - (a) \mathbb{N} は乗法に関してモノイドであるが群ではないことを示せ.
 - (b) 可換体 \mathbb{Z}_{31} において, [18] の乗法に関する逆元を求めよ.
5. $V = \{x_1, x_2, \dots, x_5\}, E = \{\{x_1, x_3\}, \{x_1, x_5\}, \{x_2, x_3\}, \{x_2, x_4\}, \{x_3, x_4\}, \{x_4, x_5\}\}$ として, グラフ $G = (V, E)$ を考える. 以下の問いに答えよ.
 - (a) G を図示せよ.
 - (b) G の隣接行列を求めよ.
 - (c) G の接続行列を求めよ.
 - (d) G の x_1 から x_4 への長さ 4 の歩道の数を求めよ.
 - (e) G がオイラーグラフ (オイラー回路を持つグラフ) かどうか, 理由とともに答えよ.