

7 整列アルゴリズム (2)

前回と同様、配列 $a[1], a[2], \dots, a[n]$ を昇順に並び替えるものとして説明する。

マージソート

マージソート (merge sort) は、配列を 2 つに等分し、それぞれを再帰的にソートする。ソートされた 2 つの部分列を結合してソートされた 1 つの列を作る。

ソートされた 2 つの列からソートされた 1 つの列を作る操作をマージ (merge) という。長さ m の配列 a と長さ n の配列 b をマージして配列 c を作るアルゴリズムは次のように書ける*¹。

```

1: MERGE( $a[ ], m, b[ ], n, c[ ]$ )
2:    $i = 1, j = 1$ 
3:   for  $k = 1$  to  $m + n$ 
4:     if  $j = n + 1$  or ( $i \leq m$  and  $a[i] \leq b[j]$ ) then
5:        $c[k] = a[i], i = i + 1$ 
6:     else
7:        $c[k] = b[j], j = j + 1$ 

```

このアルゴリズムによるマージの最悪計算量は $O(m + n)$ である。

マージソート全体のアルゴリズムは次のように書ける。

```

1: MERGESORT( $a[ ], n$ )
2:   if  $n > 1$  then
3:      $h = \lfloor n/2 \rfloor$ 
4:     長さ  $h$  の配列  $l$  を作り,  $a[1], a[2], \dots, a[h]$  を代入する
5:     長さ  $n - h$  の配列  $r$  を作り,  $a[h + 1], a[h + 2], \dots, a[n]$  を代入する
6:     MERGESORT( $l[ ], h$ )
7:     MERGESORT( $r[ ], n - h$ )
8:     MERGE( $l[ ], h, r[ ], n - h, a[ ]$ )

```

長さ n の配列に対するマージソートの最悪計算量を $T(n)$ とする。簡単のため、 $n = 2^k$ とすると、次の漸化式が成り立つ。

$$T(1) = c_1, \quad T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + c_2n \quad (n \geq 2).$$

ただし、 c_1, c_2 は n に依存しない正の定数である。この漸化式から $T(n) = O(n \log n)$ が得られる。 $n \neq 2^k$ の場合も同じ漸近評価が成り立ち、マージソートの最悪計算量は $O(n \log n)$ である。なお、マージソートでは配列 l, r を作るために追加の作業領域を必要とする。

マージソートや次に説明するクイックソートのように、問題をより小さいサイズの部分問題に分割し、その解を組み合わせて元の問題を解く方法を分割統治法 (divide and conquer) という。

*¹ 配列 a, b のどの要素よりも大きい値を持つ要素 ∞ を a, b の末尾に追加することで、第 4 行の条件を $a[i] \leq b[j]$ のみにすることもできる。この ∞ のような要素を番兵 (sentinel) と呼ぶ。

クイックソート

クイックソート (quicksort) は、配列からピボット (pivot) という要素 x を選び、配列を x 以下の要素からなる部分列、 x 自身、 x 以上の要素からなる部分列に分割する*2。2つの部分列を再帰的にソートする。

部分列を作る素朴な方法として、新たな配列 b, c を作り、 x 未満の要素を b に、 x 以上の要素を c にそれぞれ追加する方法がある。この方法は作業領域を必要とする。

次の関数は、作業領域を使わずに、部分列 $a[l], \dots, a[r]$ から2つの部分列を作る。この関数はピボットとして左端の $a[l]$ を選び、列を分割した位置の添字を返す。また、**repeat** (文) **until** (条件) は、まず (文) を実行し、(条件) が偽であれば **repeat** の直後に戻って繰り返す。(条件) が真であればループを終了する*3。

```
1: PARTITION( $a[ ], l, r$ )
2:    $i = l, j = r + 1, x = a[l]$ 
3:   while  $i \leq j$ 
4:     repeat
5:        $i = i + 1$ 
6:     until  $i > r$  or  $a[i] \geq x$ 
7:     repeat
8:        $j = j - 1$ 
9:     until  $a[j] \leq x$ 
10:    if  $i < j$  then swap( $a[i], a[j]$ )
11:     $a[l] = a[j], a[j] = x$ 
12:    return( $j$ )
```

クイックソートは次のように書ける。(配列 a 全体をソートするときは QUICKSORT($a[], 1, n$) とする。)

```
1: QUICKSORT( $a[ ], l, r$ )
2:   if  $l < r$  then
3:      $j = \text{PARTITION}(a[ ], l, r)$ 
4:     QUICKSORT( $a[ ], l, j - 1$ )
5:     QUICKSORT( $a[ ], j + 1, r$ )
```

計算量の議論を簡単にするため、配列の要素はすべて異なるとして、PARTITION ではなく素朴な方法で部分列を作ると仮定する。計算量は配列要素の比較回数で評価できるから、比較回数を評価すればよい。

ピボットが部分列の最大値や最小値であった場合、得られる部分列の一方は長さ 0 になる。これが繰り返された場合、比較回数は $O(n^2)$ となる。したがって、クイックソートの最悪計算量は $O(n^2)$ である。

一方、入力としてすべての順列が一様に現れると仮定する。平均比較回数を $T(n)$ とすると、

$$T(0) = T(1) = 0, \quad T(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (T(i-1) + T(n-i)) + n - 1 \quad (n \geq 2)$$

が成り立つ。この漸化式から $T(n) = O(n \log n)$ を得る。したがって、平均計算量は $O(n \log n)$ である。

*2 x 以外の x と値が等しい要素はどちらの部分列に入れてもよく、実装に依存して決まる。PARTITION では両方に入る。

*3 PARTITION を呼び出したとき $a[r+1]$ が存在して $a[l] \leq a[r+1]$ ならば、第 6 行の条件を $a[i] \geq x$ のみにすることができる。QUICKSORT から呼ぶときは番兵として $a[n+1] = \infty$ を追加すればよい。