

6 整列アルゴリズム (1)

以下では、配列 $a[1], a[2], \dots, a[n]$ を昇順に並べ替えるものとして説明する。

バブルソート

バブルソート (bubble sort) は、隣接している要素の順序が逆のとき交換する操作を繰り返してソートする。アルゴリズムは次のように書ける。ただし、 $\text{swap}(a[i], a[i + 1])$ は $a[i]$ と $a[i + 1]$ を交換する操作を表す。

```
1: BUBBLESORT( $a[ ], n$ )
2:   for  $j = 1$  to  $n - 1$ 
3:     for  $i = 1$  to  $n - j$ 
4:       if  $a[i] > a[i + 1]$  then
5:         swap( $a[i], a[i + 1]$ )
```

バブルソートの最悪計算量は $O(n^2)$ である。

挿入ソート

挿入ソート (insertion sort) は、要素を順に正しい位置に挿入することでソートする。詳細は第 2 回で説明した通りである。挿入ソートの最悪計算量は $O(n^2)$ であるが、入力がほぼソートされているときは高速である。これを利用して、部分列に挿入ソートを用いて高速にしたシェルソート (Shell's sort) が知られている。

選択ソート

選択ソート (selection sort) は、最小値を先頭の要素と交換する操作を繰り返すことでソートする。アルゴリズムは次のように書ける。

```
1: SELECTIONSORT( $a[ ], n$ )
2:   for  $i = 1$  to  $n - 1$ 
3:      $min = i$ 
4:     for  $j = i + 1$  to  $n$ 
5:       if  $a[min] > a[j]$  then
6:          $min = j$ 
7:     swap( $a[i], a[min]$ )
```

選択ソートの最悪計算量は $O(n^2)$ である。

ヒープソート

ヒープソート (heap sort) は、選択ソートにおける最小値の探索を、ヒープというデータ構造によって高速にしたソートである。

ヒープ

2分木 T を図示したとき、深さ最大の段は左詰めになっており、それ以外の段はすべて埋まっているとき、 T を (広義の) 完全 2 分木 (complete binary tree) という。完全 2 分木 T の各頂点が値を持つとする。 T が **max** ヒープ条件 (max-heap property) 「各頂点の値はその子の値以上である」を満たすとき、 T を **max** ヒープ (max-heap) といい、**min** ヒープ条件 (min-heap property) 「各頂点の値はその子の値以下である」を満たすとき、 T を **min** ヒープ (min-heap) という。max ヒープと min ヒープをまとめてヒープ (heap) という。順序関係を逆にすれば同じ議論が適用できるので、以下では max ヒープのみを考え、単にヒープと呼ぶ。

ヒープの上から順に左から右へ向かって添字 $1, 2, \dots$ を付けることで、ヒープを配列で表現できる。添字 i の頂点の親は添字 $\lfloor i/2 \rfloor$ の頂点であり、左の子は添字 $2i$ の頂点、右の子は添字 $2i + 1$ の頂点である。

ヒープ h には次の操作を行うことができる。

- **MAXIMUM**(h): h に含まれる値の最大値を求める。
- **INSERT**(h, x): x を h に挿入する。
- **EXTRACTMAX**(h): h に含まれる値の最大値を返し、その値を持つ頂点を h から削除する。

これらの操作を持つデータ構造を優先順位付きキュー (priority queue) という。ヒープにおける各操作は以下のように実現できる。**MAXIMUM** の最悪計算量は $O(1)$ であり、他の操作の最悪計算量は $O(\log n)$ である。

■ **MAXIMUM**(h) ヒープ条件から、ヒープの根が最大値であるので、それを返せばよい。

■ **INSERT**(h, x) まず配列としての末尾に x を追加する。 x を 2 分木の頂点と見なしたときの親と値を比較し、 x の方が値が大きいとき交換する。この操作を繰り返して交換が起きなくなったとき、ヒープ条件を満たしている。

■ **EXTRACTMAX**(h) まず **MAXIMUM** と同様に、ヒープの根の値を返す。次にヒープの根を削除し、配列としての末尾にあたる頂点 x を根に移動する。 x が子を持つとき、 x の子が 2 個あれば、それらを比較する。 x の大きい方の子と x を比較し、 x の方が小さければそれらを交換する。この操作を繰り返して交換が起きなくなったとき、ヒープ条件を満たしている。

ヒープソート

配列 a の要素をヒープにすべて挿入し、最大値を順に取り出すことで、配列 a をソートすることができる。これをヒープソートという。アルゴリズムは次のように書ける。

```
1: HEAPSORT( $a[ ], n$ )
2:   空のヒープ  $h$  を用意する
3:   for  $i = 1$  to  $n$ 
4:     INSERT( $h, a[i]$ )
5:   for  $i = n$  downto 1
6:      $a[i] =$  EXTRACTMAX( $h$ )
```

空のヒープ h を用意する代わりに配列の一部 $a[1], a[2], \dots, a[i]$ をヒープと見なすことで、作業領域を使わずにヒープソートを行うこともできる。ヒープソートの最悪計算量は $O(n \log n)$ である。なお、第 3 行、第 4 行のヒープの構成には最悪計算量 $O(n)$ のアルゴリズムも知られている。