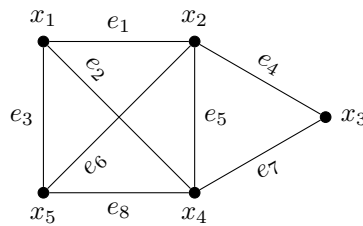


注意

自然数は 1 以上の整数とする. 集合 X, Y に対して, X と Y の差集合を $X \setminus Y$ で表す. 自然数 m を法とする合同関係による \mathbb{Z} の商集合を \mathbb{Z}_m で表し, 整数 a の同値類を $[a]$ で表す. グラフとして, 無向単純グラフのみを考える. その他, 記号・用語等は講義内で説明したものに従うものとする.

問題

1. $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ とおく. このとき, $G = \{E, P, P^2, Q, PQ, P^2Q\}$ は行列の乗法に関して群である. 以下の問いに答えよ.
 - (a) G の演算表を書け. ただし, 演算の結果は E, P, P^2, Q, PQ, P^2Q のいずれかで表すこと.
 - (b) G がアーベル群かどうか, 理由とともに答えよ.
 - (c) $X^{-1} = X$ を満たす G の要素 X をすべて求めよ.
2. 以下の問いに答えよ.
 - (a) 可換環 \mathbb{Z}_{10} が体でないことを示せ.
 - (b) 可換体 \mathbb{Z}_{41} において, $[29]$ の乗法に関する逆元を求めよ.
3. 次のグラフ (a)–(d) を図示せよ. ただし, 各グラフについて平面的グラフであるかどうか明記し, 平面的グラフであるものは, 平面グラフとして図示すること. (平面的グラフでないことを証明する必要はない.)
 - (a) 完全グラフ K_4 (b) 完全グラフ K_5 (c) 完全 2 部グラフ $K_{3,4}$ (d) 完全 2 部グラフ $K_{2,6}$
4. 次の図で表されるグラフ $G = (V, E), V = \{x_1, x_2, \dots, x_5\}, E = \{e_1, e_2, \dots, e_8\}$ について, 以下の問いに答えよ.



- (a) G の隣接行列を求めよ.
- (b) G の接続行列を求めよ.
- (c) x_1 から x_5 への長さ 4 の歩道の数をも求めよ.
- (d) $(V, E \setminus \{e_j\})$ がオイラーグラフ (オイラー回路を持つグラフ) となるような辺 e_j を一つ求め, その辺 e_j に対して, $(V, E \setminus \{e_j\})$ がオイラーグラフである理由を述べよ.