

## 注意

自然数は 1 以上の整数とする. 集合  $X, Y$  に対して,  $X$  と  $Y$  の差集合を  $X \setminus Y$ ,  $X$  と  $Y$  の直積を  $X \times Y$ ,  $X$  のべき集合を  $2^X$  でそれぞれ表す. 全体集合  $U$  の部分集合  $X$  に対して,  $X$  の補集合を  $\overline{X}$  で表す. その他, 記号・用語等は講義内で説明したものに従うものとする.

## 問題

1.  $U = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq 10\}$  を全体集合とする.  $U$  の部分集合

$$A = \{1, 2, 3, 6, 8, 10\}, \quad B = \{1, 5, 7, 8, 10\}, \quad C = \{2, 4, 5, 6, 8\}$$

に対して, 次の各集合を求め, 要素を列挙して表せ.

$$(a) (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (b) (B \setminus C) \cup (C \setminus B) \quad (c) \overline{(\overline{A} \cap B) \cup C}$$

2. 集合  $A = \{1, 2, 3, 6\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5\}, C = \{2, 3, 4, 6\}$  に対して, 次の各集合を求め, 要素を列挙して表せ.

$$(a) (B \setminus A) \times (A \cap C) \quad (b) 2^{B \cap C}$$

3. 集合  $A$  上の関係  $R$  が次の 2 つの条件を満たすとする.

(i) 任意の  $x \in A$  に対して,  $xRx$ .

(ii) 任意の  $x, y, z \in A$  に対して,  $xRy$  かつ  $yRz \rightarrow zRx$ .

このとき,  $R$  は  $A$  上の同値関係であることを示せ.

4.  $p, q, r$  を命題変数とする. 以下の問いに答えよ.

(a) 命題  $p \rightarrow (q \rightarrow r)$  の真理値表を作成せよ.

(b) 命題  $p \rightarrow (q \rightarrow r)$  と同値であるものを (i)–(iii) の中からすべて選べ.

$$(i) p \rightarrow (r \rightarrow q) \quad (ii) q \rightarrow (p \rightarrow r) \quad (iii) r \rightarrow (q \rightarrow p)$$

5. (a)–(d) の写像について, (i)–(iv) のいずれに当てはまるか理由とともに答えよ.

(a)  $f_1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}; f_1(x) = x + 3$ .

(b)  $f_2: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}; f_2(x) = -x + 2$ .

(c)  $f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f_3(x) = x^2 - 2x + 3$ .

(d)  $f_4: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f_4(x) = x^3 - x$ .

(i) 全単射である.

(ii) 単射であるが全射でない.

(iii) 全射であるが単射でない. (iv) 単射でも全射でもない.

6. 数列  $a_0, a_1, \dots$  が漸化式

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 5, \quad a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n \quad (n \geq 0)$$

で定義されているとする. 以下の問いに答えよ.

(a) 母関数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

を求めよ.

(b) 一般項  $a_n$  を求めよ.