

応用数理概論 (2) レポート課題

2020 年 1 月 16 日配布

提出日：2020 年 1 月 30 日

注意

- 以下の 6 問のうち, 2 問以上解答すること.
- 1 枚目に科目名・学修番号・氏名を書くこと.
- レポートが複数枚にわたるときは, 左上をホッチキス等で綴じること.
- A4 レポート用紙を使用すること.

問題

以下の問題では, 代数体 K の整数環を \mathcal{O}_K で表し, K の単数 (\mathcal{O}_K の単元) 全体を \mathcal{O}_K^\times で表す.

1. $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ とする. \mathcal{O}_K^\times を求めよ.
2. $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ の類数を求めよ.
3. m を正の奇数として, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{m^2+1})$ とする. $\varepsilon = m + \sqrt{m^2+1}$ とおく. 以下の問いに答えよ.
 - (a) \mathcal{O}_K を求めよ.
 - (b) $\varepsilon \in \mathcal{O}_K^\times$ を示せ.
 - (c) $\mathcal{O}_K^\times = \{\pm\varepsilon^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ を示せ.
4. K を 2 次体として, σ_1, σ_2 を相異なる K の \mathbb{Q} 上の自己同型とする. $\mathfrak{a} \neq (0)$ を \mathcal{O}_K のイデアルとする. 以下の問いに答えよ.
 - (a) $\sigma_1(\mathfrak{a}), \sigma_2(\mathfrak{a})$ は \mathcal{O}_K のイデアルであることを示せ.
 - (b) $\sigma_1(\mathfrak{a})\sigma_2(\mathfrak{a}) = (N(\mathfrak{a}))$ を示せ. ただし, 右辺は $N(\mathfrak{a}) = \#(\mathcal{O}_K/\mathfrak{a})$ が生成する \mathcal{O}_K のイデアルである.
5. $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ とする. 以下の問いに答えよ.
 - (a) 判別式 $\Delta(1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2^2})$ を求めよ.
 - (b) $1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2^2}$ が K の整数底であることを示せ.
 - (c) K の類数を求めよ.
6. $n = 12709$ を 2 次篩法で素因数分解することを考える. 以下の問いに答えよ.
 - (a) $\sqrt{n} = 112.7\dots$ である. そこで, $113 \leq t \leq 118$ の範囲の整数 t に対し, $t^2 - n$ を素因数分解せよ.
 - (b) 前問の結果を利用して, $x^2 \equiv y^2 \pmod{n}$ を満たす相異なる整数 x, y を 1 組求めよ.
 - (c) $\gcd(x - y, n)$ を計算することで, n を素因数分解せよ.