

問題

1. 次の関数の漸近評価を求め、 $O(\cdot)$ によって表せ。この問題は答えのみでよい。

(a) $f_1(n) = n^6 + 9n^3 + 5n + 8.$

(b) $f_2(n) = (\log \log n)^2 + \log n + 2.$

2. 以下の問いに答えよ。

(a) 空のスタックに対し、次の操作を行ったときの過程を図示せよ。ただし、 $\text{PUSH}(x)$ は x をスタックに挿入する操作を、 POP はスタックから値を取り出す操作をそれぞれ表す。

$$\text{PUSH}(3) \rightarrow \text{PUSH}(7) \rightarrow \text{PUSH}(4) \rightarrow \text{PUSH}(8) \rightarrow \text{POP} \rightarrow \text{PUSH}(1) \rightarrow \text{POP} \rightarrow \text{POP} \rightarrow \text{POP}$$

(b) 空の max ヒープに対し、次の操作を行ったときの過程を図示せよ。ただし、 $\text{INSERT}(x)$ は x をヒープに挿入する操作を、 EXTRACTMAX はヒープに含まれる値の最大値を返し、その値を持つ頂点をヒープから削除する操作をそれぞれ表す。

$$\begin{aligned} \text{INSERT}(5) \rightarrow \text{INSERT}(1) \rightarrow \text{INSERT}(9) \rightarrow \text{INSERT}(2) \rightarrow \\ \text{INSERT}(6) \rightarrow \text{INSERT}(3) \rightarrow \text{EXTRACTMAX} \rightarrow \text{EXTRACTMAX} \end{aligned}$$

3. 次の整数列 $(*)$ を考える。

$$35, 56, 79, 22, 31, 59, 85, 60 \tag{*}$$

(a) 整数列 $(*)$ を挿入ソートによって昇順に整列し、その経過を図示せよ。

(b) 整数列 $(*)$ をマージソートによって昇順に整列し、その経過を図示せよ。

(c) 整数列 $(*)$ をクイックソートによって昇順に整列し、その経過を図示せよ。ただし、ピボットとして左端の要素を選ぶものとする。

4. 連立合同式

$$\begin{cases} X \equiv 3 \pmod{5}, \\ X \equiv 5 \pmod{7}, \\ X \equiv 7 \pmod{17} \end{cases}$$

を満たす整数 X で、 $0 \leq X < 5 \cdot 7 \cdot 17$ を満たすものをすべて求めよ。

5. 9379 を素因数分解せよ。必要なら次の値を用いてもよい。

$$96^2 = 9216, \quad 97^2 = 9409, \quad 98^2 = 9604, \quad 99^2 = 9801.$$

6. 素数 p と整数 a は $p \equiv 3 \pmod{4}$, $0 < a < p$, $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$ を満たすとする。ただし、 $\left(\frac{a}{p}\right)$ はルジャンドル記号である。以下の問いに答えよ。

(a) $x \equiv a^{(p+1)/4} \pmod{p}$ を満たす整数 x に対して、 $x^2 \equiv a \pmod{p}$ が成り立つことを示せ。

(b) $x^2 \equiv a \pmod{p}$ を満たす整数 x を $O(\log^3 p)$ のビット演算量で計算できることを示せ。ただし、四則演算のビット演算量は以下の通りとする。

- k ビット以下の 2 つの整数の加減算のビット演算量は高々 k である。
- k ビットの整数と l ビットの整数の乗算のビット演算量は高々 kl である。
- k ビットの整数を l ビットの整数で割る除算のビット演算量は高々 kl である。