

6. ソート (2) : より高度なソート

前回と同様に, 列 $a[0], a[1], \dots, a[n-1]$ を昇順に並べ替えるものとして説明する.

ヒープソート まず, 要素の列から最大値が先頭になるヒープを作る*¹. 次に, ヒープから最大値を取り出し, 最後の要素と交換する操作を繰り返すことでソートする.

クイックソート 要素の列からピボット (枢軸要素) を選ぶ. ピボット未満の要素を左側に, ピボット以上の要素を右側に集め, 2つの部分列を作る. この2つの部分列に対して同じ操作を再帰的に実行することで, 要素の列がソートされる.

列 $a[l], \dots, a[r]$ から2つの部分列を作る操作は次のように行うことができる.

- (1) $a[l], \dots, a[r]$ からピボットを選び, 列の右端 $a[r]$ と交換する.
- (2) $i = l - 1, j = r$ とする.
- (3) i を 1 増やす. $a[i] < a[r]$ ならば (3) に戻る.
- (4) j を 1 減らす. $i < j$ かつ $a[j] \geq a[r]$ ならば (4) に戻る.
- (5) $i < j$ ならば, $a[i]$ と $a[j]$ を交換し, (3) に戻る.
- (6) $a[i]$ と $a[r]$ を交換する. このとき, 次が成り立つ.

$$a[l], \dots, a[i-1] < a[i], \quad a[i] \leq a[i+1], \dots, a[r].$$

マージソート 列を2つに等分し, それぞれを再帰的にソートする. ソートされた2つの部分列を結合してソートされた列を作る.

部分列の結合は次のように行われる. まず新しい空の列を用意しておく. 次に, 2つの部分列の先頭を比較し, 小さい方を取り除いて新しい列に追加する. この操作を繰り返し, 一方の部分列がなくなったら, もう一方の部分列を新しい列に連結する.

問題

- 実数 x に対し, x の切り捨て (x 以下の整数で最大のもの) を $\lfloor x \rfloor$ で表し, x の切り上げ (x 以上の整数で最小のもの) を $\lceil x \rceil$ で表す.
- 解答に際して, その問題より前にある問題の結果を用いてもよい.
- 比較回数, 交換回数は列の要素のものだけを数え, 添字については数えないものとする.

*¹ プリント No. 4 では最小値を先頭に行っていたことに注意せよ.

6-1. 次の整数列 (*) をヒープソートによって昇順にソートし, その経過を図示せよ.

27, 49, 86, 64, 33, 17, 84, 70 (*)

6-2. 整数列 (*) をクイックソートによって昇順にソートし, その経過を図示せよ. ただし, ピボット (枢軸要素) として右端の数を選ぶものとする.

6-3. 整数列 (*) をクイックソートによって昇順にソートし, その経過を図示せよ. ただし, ピボットとして左端の数を選ぶものとする.

6-4. 整数列 (*) をマージソートによって昇順にソートし, その経過を図示せよ.

6-5. n 個の要素の列をヒープソートによってソートするとき, 比較回数, 交換回数とともに $O(n \log n)$ であることを示せ.

6-6. n 個の相異なる要素の列をクイックソートによってソートする. ピボットとして常に最大の要素を選んだとき, 比較回数が $O(n^2)$ であることを示せ.

6-7. n 個の要素の列をマージソートによってソートするとき, 最悪の場合の比較回数を $C(n)$ とする.

(a) 次の式が成り立つことを示せ.

$$C(1) = 0, C(n) = C\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + C\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n - 1 \quad (n \geq 2).$$

(b) k を非負整数とする. $C(2^k)$ を k の式で表せ.

(c) $C(n) = O(n \log n)$ を示せ. ただし, $C(n)$ が単調増加であることを用いてよい.

6-8. 整数列 (*) を並べ替えて得られる列の中で, マージソートによって昇順にソートしたとき, 最も比較回数が多いものを一つ答えよ.

6-9. a, b をソートされた n 個の要素の列とする. マージソートと同様の方法により, a と b に共通する要素があるかどうか $O(n)$ の比較回数で決定できることを示せ.