

5. ソート (1) : 初等的なソート

要素の列を大きさの順に並び替えることをソート (整列) という。

ソートのアルゴリズムには様々なものが知られているが、今回は以下のものを取り扱う。以下では、列 $a[0], a[1], \dots, a[n-1]$ を昇順に並び替えるものとして説明する。

バブルソート 列 $a[0], a[1], \dots, a[n-1]$ を先頭から見ていき、隣接している要素の順序が逆転していたら交換する。これを最後まで行くと、 $a[n-1]$ が最大値となるので、列 $a[0], a[1], \dots, a[n-2]$ に同様の操作を行う。以下同様に繰り返す。

選択ソート 列 $a[0], a[1], \dots, a[n-1]$ から最小の要素を選び、それを $a[0]$ と交換する。次に、列 $a[1], a[2], \dots, a[n-1]$ から最小の要素を選び、それを $a[1]$ と交換する。以下同様に繰り返す。

挿入ソート $a[0] > a[1]$ ならば $a[0]$ と $a[1]$ を交換する。このとき列 $a[0], a[1]$ はソートされている。次に、 $a[2]$ を列 $a[0], a[1]$ の中で正しい位置に挿入する。このとき列 $a[0], a[1], a[2]$ はソートされている。以下同様に繰り返す。

シェルソート^{*1} 正の整数の列 h_1, h_2, \dots, h_k を固定する。ただし、 $h_k = 1$ とする。次の手順でソートを行う。

1. $i = 1, 2, \dots, k$ に対して手順 2 を繰り返す。
2. $j = 0, 1, \dots, h_i - 1$ に対して、部分列 $a[j], a[j + h_i], a[j + 2h_i], \dots$ を挿入ソートでソートする。

手順 2 を h_i ソートという。また、すべての $j = 0, 1, \dots, h - 1$ に対して、 $a[j] \leq a[j + h] \leq a[j + 2h] \leq \dots$ であるとき、列 a は h ソート済みであるという。

数列 $\{h_i\}$ としては、例えば、以下のものが用いられる。

- $h_k = 1, h_{i-1} = 3h_i + 1.$
- $h_k = 1, h_{i-1} = 2h_i + 1.$

どちらの場合も、最悪の場合の比較回数は $O(n^{3/2})$ であることが知られている。また、別の数列 $\{h_i\}$ で、比較回数が漸近的により少ないものも知られている。

*1 シェル (Shell) は人名である。

問題

5-1. 次の整数列 (*) をバブルソートによって昇順にソートし, その経過を図示せよ.

27, 49, 86, 64, 33, 17, 84, 70 (*)

5-2. 整数列 (*) を選択ソートによって昇順にソートし, その経過を図示せよ.

5-3. 整数列 (*) を挿入ソートによって昇順にソートし, その経過を図示せよ.

5-4. 整数列 (*) をシェルソートによって昇順にソートし, その経過を図示せよ. ただし, 数列 $\{h_i\}$ として, $h_1 = 4, h_2 = 1$ を用いるとする.

5-5. 整数列 (*) をシェルソートによって昇順にソートし, その経過を図示せよ. ただし, 数列 $\{h_i\}$ として, $h_1 = 7, h_2 = 3, h_3 = 1$ を用いるとする.

以下の問題において, 比較回数, 交換回数, 代入回数などは列の要素のものだけを数え, 添字については数えないものとする.

5-6. 整数列 (*) を並べ替えて得られる列の中で, バブルソートによって昇順にソートしたとき, 最も交換回数が多いものを一つ答えよ.

5-7. 挿入ソートのアルゴリズムは以下の擬似コードで書ける. ただし, \leftarrow は代入を表す.

```
for  $i \leftarrow 1, 2, \dots, n - 1$  do
   $t \leftarrow a[i]$ 
   $j \leftarrow i - 1$ 
  while  $j \geq 0$  and  $a[j] > t$  do
     $a[j + 1] \leftarrow a[j]$ 
     $j \leftarrow j - 1$ 
  end while
   $a[j + 1] \leftarrow t$ 
end for
```

このアルゴリズムで n 個の要素の列をソートするとき, 最悪の場合の比較回数, 代入回数はともに $O(n^2)$ であることを示せ.

5-8. 挿入ソートにおいて, 各要素を挿入すべき位置を決めるために 2 分探索を用いることができる. n 個の要素の列をこの方法でソートするとき, 最悪の場合の比較回数は $O(n \log n)$ であることを示せ. (要素を列に挿入する計算量は変わらないので, ソートの効率が大きく改善されるわけではないことに注意せよ.)