アルゴリズム B 演習 No. 3　　2018 年 10 月 26 日配布

3. スタック，キュー，木

- **スタック**とは，後に入れたデータを先に取り出すデータ構造である．この性質を LIFO (last-in first-out) と呼ぶ．次の操作を行うことができる．
  - push(x): スタックの一番上に x を挿入する．
  - pop: スタックの一番上の要素を返し，それをスタックから削除する．
- **キュー（待ち行列）**とは，先に入れたデータを先に取り出すデータ構造である．この性質を FIFO (first-in first-out) と呼ぶ．次の操作を行うことができる．
  - enqueue(x): キューの最後尾に x を挿入する．
  - dequeue: キューの先頭の要素を返し，それをキューから削除する．
- 特別な頂点が 1 つ定まっている木を**根付き木**といい，この特別な頂点を**根**という．隣接する 2 頂点 P, Q に対し，P の方が根に近いとき，P を Q の**親**，Q を P の**子**という．また，頂点 Q から根までの道の間に頂点 P があるとき，P を Q の**先祖**，Q を P の**子孫**という．子を持たない頂点を**葉**という．頂点から根までの道の長さをその頂点の**深さ**という．頂点の深さの最大値を根付き木の**高さ**[*1]という．
- 各頂点の子の数が n 以下であるような根付き木を $\boldsymbol{n}$ **分木**という．
- 2 分木においては，子が左側か右側かを常に指定し，**左の子**，**右の子**という．また，左の子，右の子を根とする部分木をそれぞれ**左部分木**，**右部分木**という．
- 2 分木において，深さが最大でない頂点はすべて埋まっており，深さが最大の頂点は左詰めになっているものを，（広義の）**完全 2 分木**という．
- 2 分木 T において，どの 2 頂点の値も比較可能であり，簡単のため，どの 2 頂点も同じ値を持たないものとする．T が **2 分探索木**であるとは，各頂点の値が，左部分木のどの頂点の値よりも大きく，右部分木のどの頂点の値よりも小さいことである．次の操作を行うことができる．
  - min (max): T に含まれる値の最小値（最大値）を求める．
  - search(x): x が T に含まれるかどうか判定する．
  - insert(x): x を T に挿入する．
  - delete(x): x を T から削除する．

  最小値（最大値）を求めるには最も左（右）にある葉を探せばよい．

  x が T に含まれるか判定するには，まず x を根と比較する．一致すれば x は T に含まれる．x の方が小さいときは左部分木に対して，x の方が大きいときは右部分

[*1] 頂点の深さの最大値に 1 加えたものを高さと呼ぶこともある．

木に対して同じ操作を繰り返す．葉に到達しても一致しないならば，x は T に含まれない．

データを挿入する際には正しい位置を同様に探し，葉を付け加えればよい．

データの削除は次のように行われる．まず，削除する頂点が葉である場合は，それを取り除けばよい．削除する頂点が 1 個の子を持つ場合，上下の頂点をつなげばよい．削除する頂点が 2 個の子を持つ場合，左部分木の頂点で値が最大のもの（または右部分木の頂点で値が最小のもの）を削除する頂点の位置に移し，空いた頂点の上下の頂点をつなげばよい．

一般に，2 分探索木はデータの探索が高速に可能である（平均で $O(\log n)$ 回の比較でよい）．しかし，データの挿入・削除の順序によっては木の高さが大きくなり，効率が非常に悪くなる．

問題

3-1. 空のスタックに対し，次の操作を行ったときの過程を図示せよ．

$$\text{push}(2) \to \text{push}(4) \to \text{push}(7) \to \text{push}(3) \to \text{pop} \to \\ \text{push}(5) \to \text{push}(6) \to \text{pop} \to \text{push}(1) \to \text{pop}$$

3-2. 空のキューに対し，次の操作を行ったときの過程を図示せよ．

$$\text{enqueue}(2) \to \text{enqueue}(4) \to \text{enqueue}(7) \to \text{enqueue}(3) \to \text{dequeue} \to \\ \text{enqueue}(5) \to \text{enqueue}(6) \to \text{dequeue} \to \text{enqueue}(1) \to \text{dequeue}$$

3-3. T を高さ h の広義の完全 2 分木とする．T の頂点の個数の最大値と最小値を求めよ．

3-4. 要素 45, 52, 37, 79, 78, 62, 29 を持つ 2 分探索木の中で，高さが最も小さくなるものと，高さが最も大きくなるものをそれぞれ 1 つずつ図示せよ．

3-5. 空の 2 分探索木に対し，次の操作を行ったときの過程を図示せよ．

$$\text{insert}(47) \to \text{insert}(39) \to \text{insert}(77) \to \text{insert}(61) \to \\ \text{insert}(20) \to \text{insert}(41) \to \text{insert}(95) \to \text{delete}(47)$$

3-6. 空の 2 分探索木に対し，次の操作を行ったときの過程を図示せよ．

$$\text{insert}(63) \to \text{insert}(98) \to \text{insert}(21) \to \text{insert}(27) \to \\ \text{insert}(73) \to \text{insert}(24) \to \text{delete}(63) \to \text{insert}(71)$$